

# Nuages de points et reconstructions 3D

Christian Nguyen

Département d'informatique  
Université de Toulon

# Introduction

La reconstruction de surfaces à partir de nuages de points est un problème important dans la modélisation géométrique.

Dans quels buts ?

- interpolation vs approximation,
  - reconstruction de surfaces vs préservation des frontières,
  - surfaces lisses par morceaux ou non,
  - préservation des détails vs représentation compacte.
- différentes méthodes de reconstructions pour différentes applications.

# Introduction

Soit un ensemble de points  $X = x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  échantillonnés à partir d'une surface inconnue  $S$ , on veut construire une surface  $\hat{S}$  à partir des données observées  $X$  telle que  $\hat{S}$  se rapproche de  $S$ .

Les méthodes de reconstruction peuvent être classifiées en deux catégories suivant la forme de représentation des surfaces :

- **représentation explicite** : emplacement et géométrie extérieurs, principalement basée sur des triangulations de Delaunay,
- **représentation implicite** : intègre la surface comme un codimension d'un ensemble de niveau d'une fonction scalaire.

# Numérisation 3D

La numérisation 3D a été introduite par la topographie et la photogrammétrie.

Cette discipline a connu un nouvel essor avec l'émergence de techniques de numérisation 3D à partir de laser.

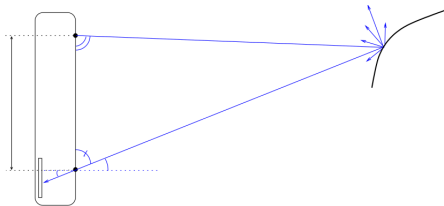
Les deux techniques les plus couramment utilisées par les scanners laser sont la triangulation optique et le temps de vol.

# Triangulation optique

Principe :

- 1 L'émetteur envoie un faisceau laser avec un angle connu.
- 2 Ce faisceau est réfléchi dans la direction du capteur.
- 3 On mesure l'angle du faisceau au niveau du capteur.

La distance entre l'émetteur et le capteur étant connue, la distance du point d'impact peut être déduite par trigonométrie.



Ce principe fournit des données très précises à courtes distances (triangle non dégénéré). Lorsque la distance augmente, la précision diminue comme le carré de la distance.

# Temps de vol

Le principe du temps de vol est de mesurer le temps que met la lumière pour parcourir la distance du scanner à la surface et revenir.

Étant donné que le temps mis par la lumière est en général très faible, et qu'il est techniquement difficile de mesurer des temps aussi court, on recourt à la modulation de phase.

Cette technique consiste à moduler le signal émis et de mesurer la différence de phase du signal reçu.

La mesure du temps est transformée en une mesure de déphasage et d'un nombre entier de période.

# Étapes de la numérisation 3D

- 1 Saisie des données sur site : consiste à réaliser des « scans » depuis différents points de vue de la scène à numériser.
- 2 Pré-traitement des données (vérification qualité, recalage des points de vue) : vérifications éventuelles de la qualité de la numérisation et recalage des vues dans un même repère, pour obtenir le nuage de points.
- 3 Segmentation (subdivision de l'ensemble des points en sous-ensembles homogènes, suivant des critères prédéfinis) et modélisation (génération des surfaces des modèles).
- 4 Export vers des logiciels spécialisés.

# Saisie des données

Un scanner qui mesure, pour chaque position  $(x, y)$ , une valeur de distance suivant une même direction  $z$  (double balayage linéaire) produit une image 2,5D.

En effet, au niveau de gris associé à chaque pixel de coordonnées  $(x, y)$  correspond une altitude  $z$ .

La particularité de ce type de données réside en une structure de grille  $(x, y)$  et la description de la scène comme un graphe de fonction  $z = f(x, y)$ .

Remarque : le scanner effectue un balayage angulaire et produit une projection centrale, la grille correspond dans ce cas à un rectangle tracé sur une sphère.



# Caractéristiques des données 3D

Les données disponibles à l'issue de l'étape de recalage se présentent sous la forme d'un nuage de points 3D (une simple liste de coordonnées  $(x, y, z)$ ).

Ce nuage de points est caractérisé par :

- un **ensemble volumineux et non-structuré de points** (dès lors que plusieurs vues sont recalées et fusionnées, il n'y a plus de structure de grille ou de ligne de scan),
- une **densité de points non-homogène** (distance et orientation de la surface par rapport au scanner, parties scannées dans plusieurs points de vue, occlusions, etc.),
- un **bruit sur les points** (dispersion (a priori gaussienne, distorsion (nécessite un étalonnage), erreurs de recalage) ; le bruit total dépend d'autres paramètres (orientation et spécularité des surfaces, lumière ambiante, température).

# Plan

- 1 Structuration, segmentation
- 2 Représentation explicite
- 3 Représentation implicite
- 4 Modèles

# Structuration

La structuration permet de rendre les **méthodes de segmentation** qui suivent plus **simples**, plus **rapides**, donc plus efficaces.

Les structures généralement introduites sont de plusieurs types : partitionnement en grille,  $\alpha$ -forme, arbre, graphe, squelette, etc.

# Partitionnement en grille

L'espace et le nuage de points peuvent être divisés en **quadrillage régulier** de type quadtree (2D) ou octree (3D), ce qui donne des *voxels*.

Il est également possible de s'adapter un peu plus aux données par des **partitions adaptatives**.

Ces structures prennent en compte la densité de points pour créer des cellules plus petites dans les régions denses :

- l'octree est de structure régulière mais avec des nombres de points différents dans chaque cellule,
- le k-d tree divise chaque cellule en laissant le même nombre de points de chaque côté.

► ces structures ne donnent pas d'indication sur les surfaces présentes, mais sont utiles pour **accélérer l'accès** aux points d'un nuage (recherche de voisins par exemple).

# Arbre quadrant (*quadtree*) et arbre octant (*octree*)

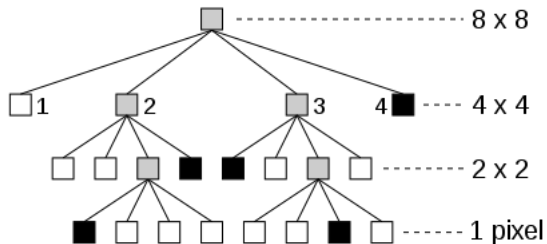
La racine de l'**arbre quadrant** représente un tableau de  $2^k \times 2^k$  voxels.

Tout nœud interne de l'arbre quadrant a quatre fils, correspondant aux quatre quadrants définis par le centre de la région associée à ce nœud.

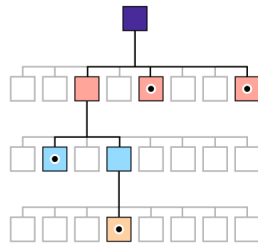
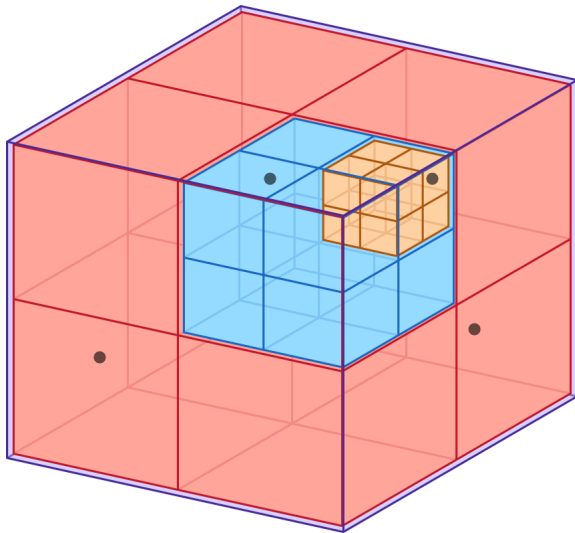
Un nœud n'a pas de fils lorsque la région associée est homogène. Dans le pire des cas, tout nœud terminal représente un seul point.

À noter que la partie haute de l'arbre peut être en mémoire centrale, et que les parties basses peuvent être stockées sur disque.

# Arbre quadrant (quadtree)



# Arbre octant (*octree*)







# Les k-d arbres (k-d trees)

Deux cas, l'**hyperplan de coupe** passe soit :

- par un des points du nuage, typiquement le point dont la coordonnée  $x_j$  est la médiane de l'ensemble,
- entre deux points consécutifs sur le  $x_j$  ordre.

Dans le premier cas, les nœuds contiennent les points; dans le second, les feuilles contiennent les points.

Il faut faire la différence entre le cas :

- **statique** : le nuage de points est connu à l'avance et n'est pas modifié
  - ▶ précalcul d'un k-d arbre équilibré
- **dynamique** : autorise des insertions et des suppressions
  - ▶ les opérations de maintenance peuvent être coûteuses et/ou déséquilibrer la structure.

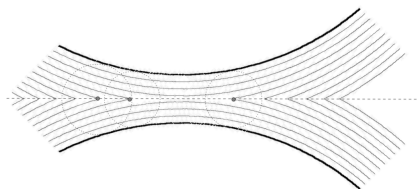
# Squelettes

Sur des images 2D, le squelette est souvent défini via des opérations de morphologie mathématique (dilatation, érosion).

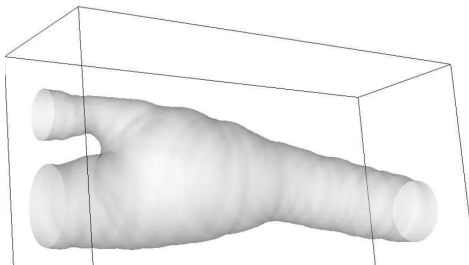
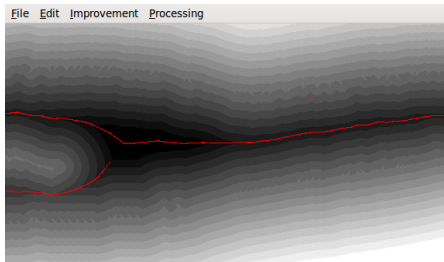
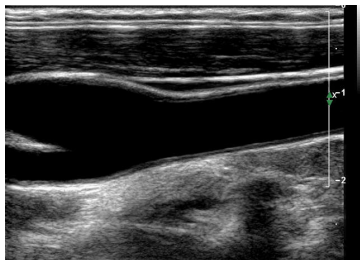
En 3D, on peut définir un squelette à partir d'une fonction level set  $\psi : \{(x_1, \dots, x_n) \mid \psi(x_1, \dots, x_n) = c\}$ ,  $c$  constante.

Dans l'exemple ci-dessous, le squelette est identifié par les points singuliers de la fonction  $\nabla\psi$ .

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \psi(y) = \inf_{x \in S} \{\|x - y\| - r(x)\}$$



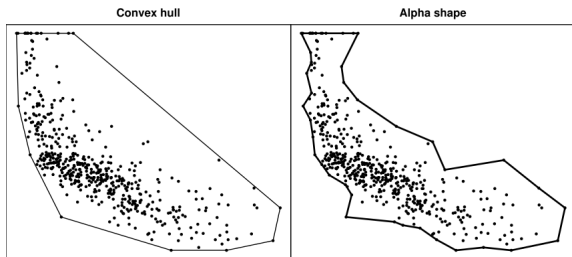
# Squelettes



# $\alpha$ -shapes

Famille de courbes simples linéaires par morceaux dans le plan euclidien associées à la forme d'un ensemble fini de points (généralisation du concept d'enveloppe convexe).

L'intérêt des  $\alpha$ -shapes est de produire un maillage suivant mieux la forme du nuage de points.

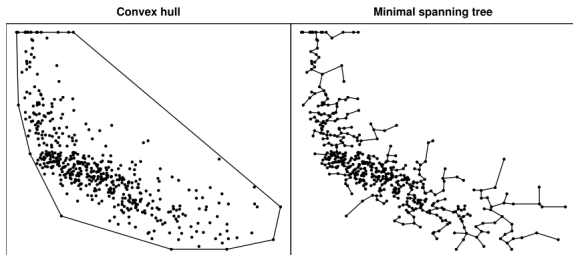


La faiblesse de ce type de représentation est qu'il faut trouver la bonne taille ( $\alpha$ ), et que cette taille est constante sur toute la scène.

# Arbres, graphes

L'arbre d'escarpement minimal (*Minimum Spanning Tree* ou MST) est une structure qu'il peut être intéressant de construire à partir d'un nuage de points.

Le MST d'un graphe est un arbre couvrant (arbre qui connecte tous les sommets ensemble) dont la somme des poids des arêtes est minimale.



# Segmentation

La segmentation permet de subdiviser un nuage de points global en sous-nuages de points présentant un intérêt.

On peut distinguer plusieurs critères :

- **critères de cohérence spatiale** : permet de subdiviser un nuage en clusters de points proches,
- **critères géométriques** : consiste à rechercher dans un nuage de points des surfaces géométriques (comme des plans),
- **critères basés sur des descripteurs homogènes** : des descripteurs mathématiques comme la densité ou l'écart moyen aux voisins peuvent être calculés, ce qui permet de regrouper les points par zone de descripteurs homogènes.

## Sur une ligne de scan

Le cas le plus simple est celui où l'on traite une **liste ordonnée de points 2D** formée par une ligne de scan (plus généralement de coupes planes d'un objet numérisé).

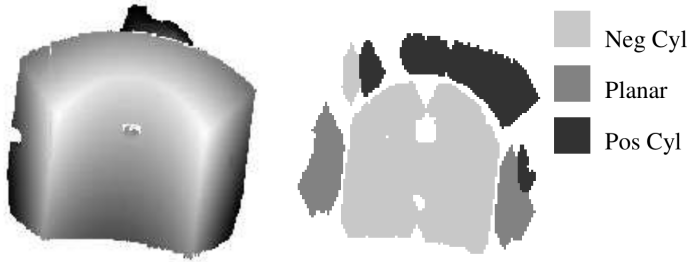
On met en œuvre des techniques de **segmentation de courbes** (*curve partitioning*) en segments ou en arcs de cercles, ou encore avec des ellipses.

Par exemple, une approche récursive faisant intervenir la notion de corde : une ligne polygonale approche la courbe à un écart donné près (au sens de la distance perpendiculaire).

# Sur une image de profondeur

Le cas «2,5D» correspond au cas d'une image de profondeur, c'est-à-dire à peu près à une vue de scanner.

Du fait de la structure en grille, le cas 2,5D se rapproche des techniques désormais classiques de segmentation d'images 2D.



On distingue trois classes de méthodes : par contours (*edge-based*), par régions (*region-based*), ou hybrides.



## Sur un nuage de points 3D

Le maillage 3D permet d'estimer les normales, les courbures, etc. et ainsi faire une classification des points suivant ces informations.

Aussi la plupart des solutions utilisent, plus ou moins explicitement, une structure de maillage au préalable de la phase de segmentation proprement dite.

Hoppe et al. (1992) ont proposé une construction de maillage adaptée au cas d'un seul objet.

Par la suite, ils ont construit (1994) des surfaces lisses par morceaux à l'aide de surfaces de subdivision, ce qui leur a permis de représenter des objets de topologie arbitraire et comportant des arêtes vives.

# Plan

- 1 Structuration, segmentation
- 2 Représentation explicite
- 3 Représentation implicite
- 4 Modèles

# Introduction

Ce sont des méthodes de reconstruction qui s'appuient sur la géométrie algorithmique.

On retrouve des notions telles qu'enveloppe convexe, triangulation de Delaunay, etc.

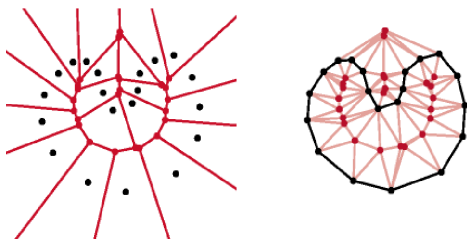
Au delà du maillage d'une surface<sup>1</sup>, se pose la question de la détermination de la frontière de cette dernière. Deux approches illustrent cette problématique : la « croûte » et la « boule pivotante ».

---

1. vu dans un cours précédent

# Croûte d'un nuage de points [Amenta et al. 1998]

Le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay sont le support d'une triangulation surfacique, la « croûte » (*crust*).



À gauche, les points du diagramme de Voronoï (en rouge) approximent les axes médians de la courbe.

À droite, la triangulation de Delaunay de l'union de tous les points, avec les arêtes de la « croûte » en noir.

# Croûte d'un nuage de points

La frontière de la surface est un sous-ensemble des arêtes de la triangulation de Delaunay.

Pour déterminer les arêtes qui définissent la frontière, on distingue deux types d'arêtes :

- les arêtes qui relient des sommets adjacents sur la frontière,
  - les arêtes qui traversent la surface maillée.
- ▶ suppression des arêtes qui traversent la forme.

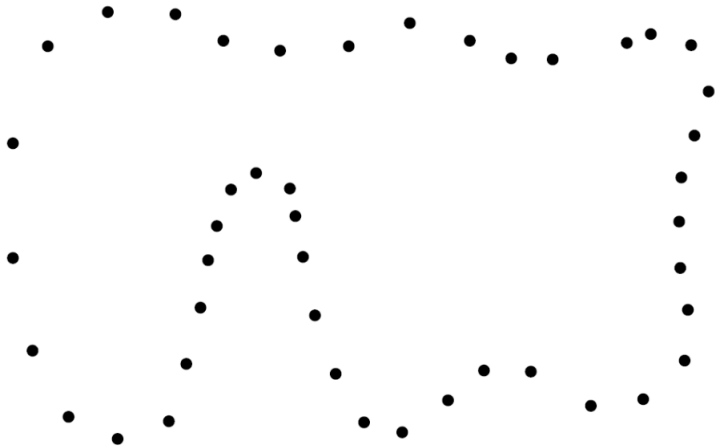
# Croûte d'un nuage de points

En 2D :

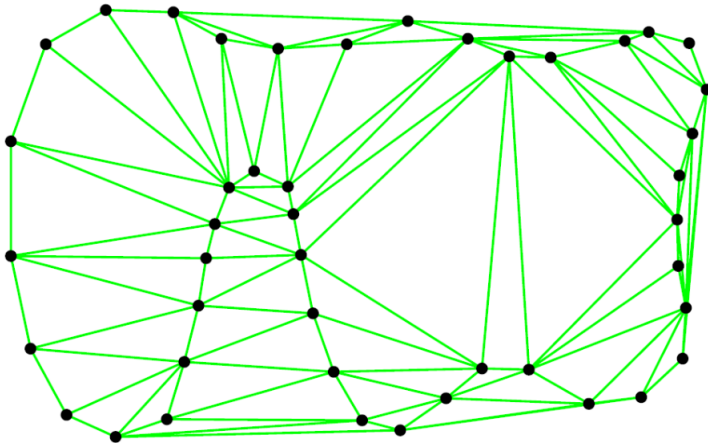
- à partir d'un nuage de points, construire le diagramme de Voronoï puis la triangulation de Delaunay de l'union des points du nuage et du diagramme,
- conserver uniquement les arêtes qui relient les points du nuage initial (ce qui revient à conserver les arêtes contenues dans un cercle qui ne contient aucun sommet du diagramme de Voronoï).

En 3D : on n'ajoute pas l'ensemble des sommets du diagramme de Voronoï à l'ensemble, mais uniquement les pôles (les deux sommets de cette cellule qui sont les plus éloignés du point générateur ou germe de la cellule).

# Croûte d'un nuage de points

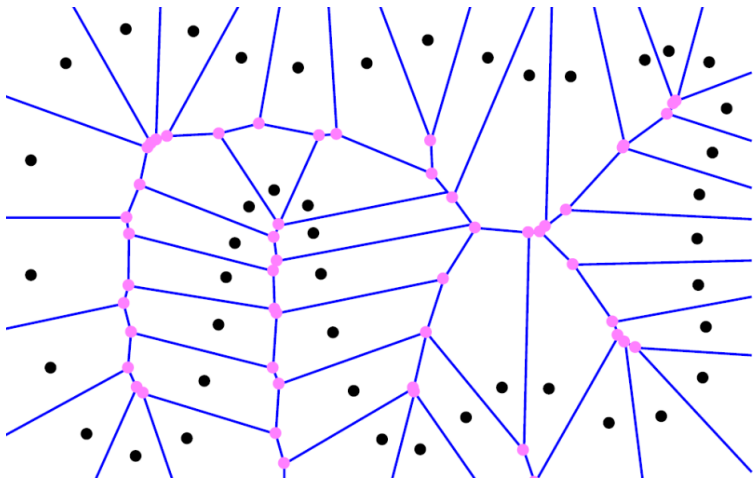


# Croûte d'un nuage de points

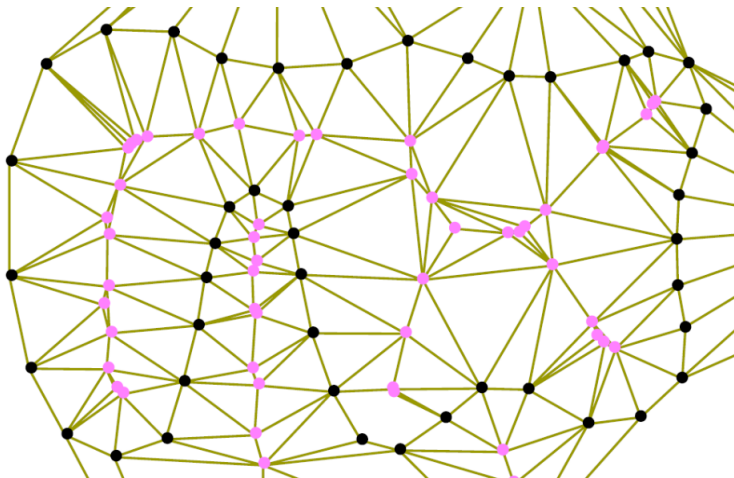




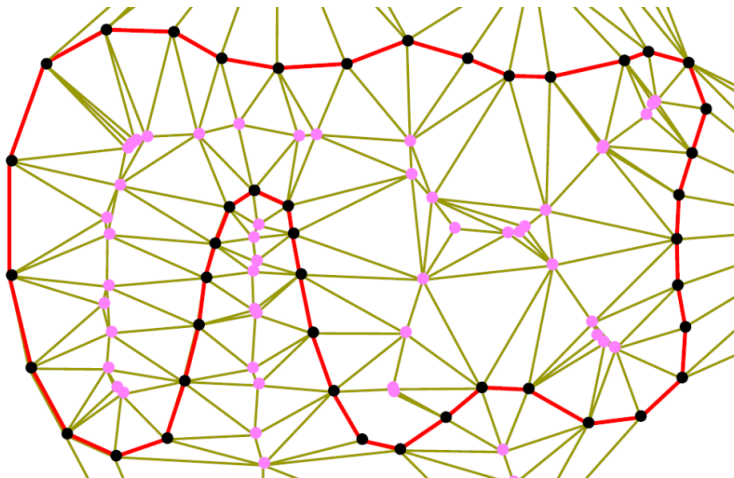
# Croûte d'un nuage de points



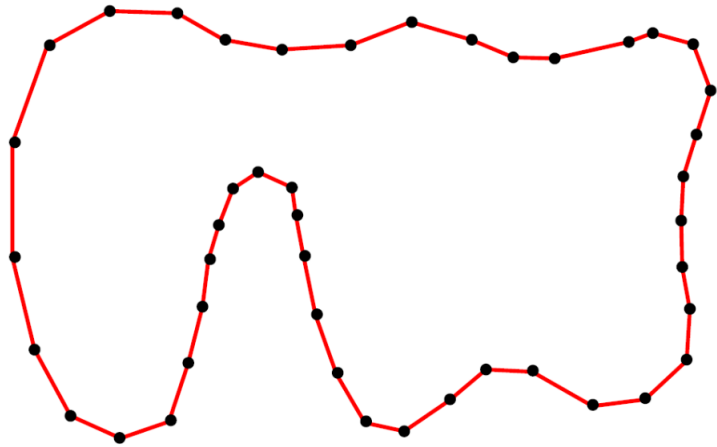
# Croûte d'un nuage de points



# Croûte d'un nuage de points



# Croûte d'un nuage de points



# Algorithme de pivotement de la balle (BPA)

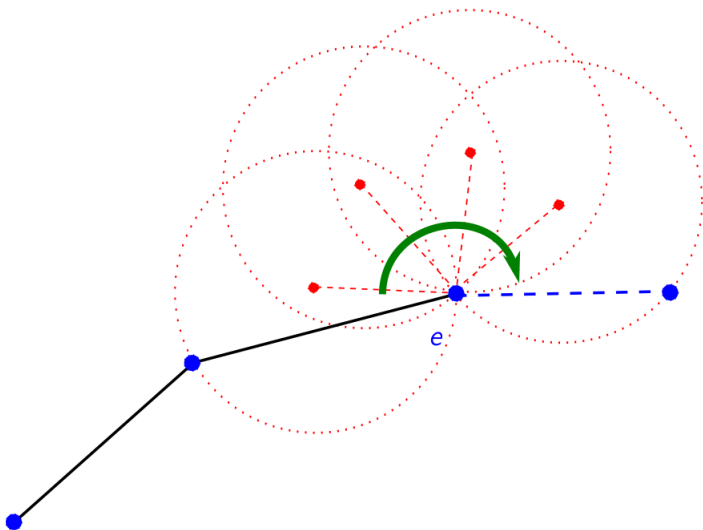
L'algorithme BPA calcule un maillage surfacique triangulaire qui interpole un nuage de points.

Trois points forment un triangle si la balle de rayon  $\rho$  les contient sans contenir aucun autre point.

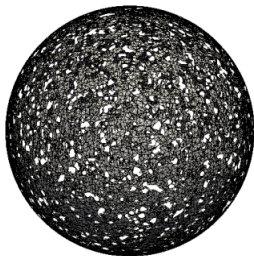
L'initialisation se fait à partir d'un triangle donné. La balle pivote autour d'une arête jusqu'à intersecter un autre point, formant ainsi un autre triangle. La triangulation se poursuit à partir de chaque nouvelle arête (front d'arêtes).

La surface résultant est exempte d'auto-intersections (intersections réduites aux arêtes ou aux sommets et au plus deux triangles sont adjacents par une arête).

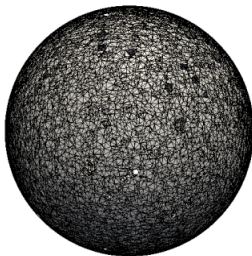
# Rotation de la balle (en 2D)



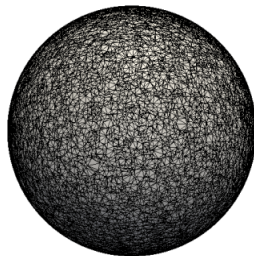
# Choix critique du rayon $\rho$



$\rho = 0,02$



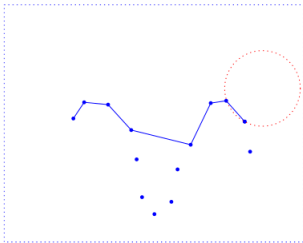
$\rho = 0,03$



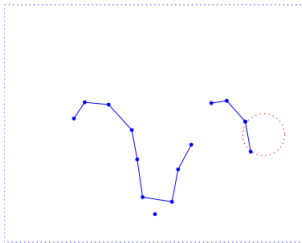
$\rho = 0,05$

Si  $\rho$  est trop petit, des régions peuvent ne pas être triangularisées, mais un rayon plus grand entraîne plus de calculs et des pertes de détails.

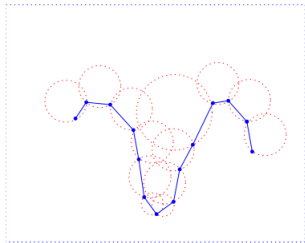
# Choix critique du rayon $\rho$



perte de détails



création de trous



rayons multiples

- ▶ une solution est d'utiliser des rayons différents.
- ▶ utilisation d'un espace de partitionnement pour accélérer les calculs.



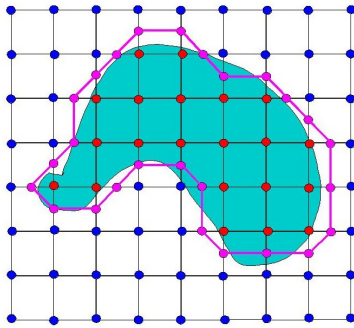
# Plan

- 1 Structuration, segmentation
- 2 Représentation explicite
- 3 Représentation implicite**
- 4 Modèles

# Introduction

La conversion d'un nuage de point en un champ scalaire permet de construire un maillage polygonal par approximation d'une isosurface.

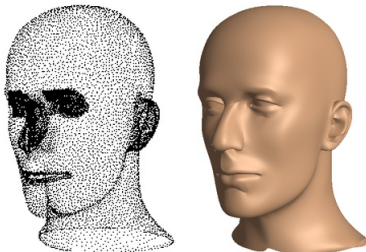
Construction de courbes isovaleurs d'un champ scalaire sur une surface maillée par des quadrangles :



# Méthode de Hoppe

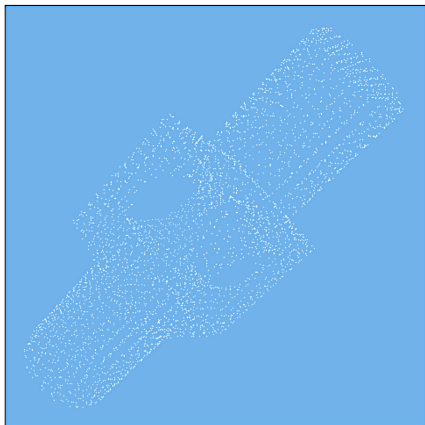
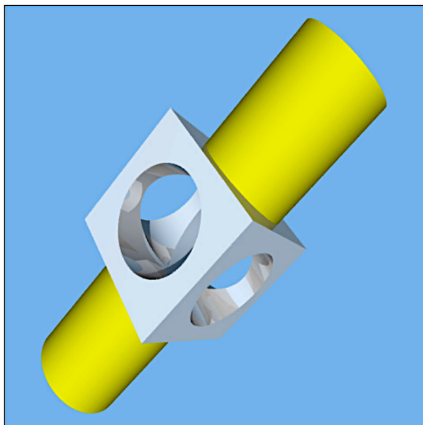
Hoppe et al. 92 ont développé la première méthode de reconstruction de surface arbitraire à partir d'un nuage de points non structuré.

Cette méthode est adaptée à des scènes où les points sont sur une seule surface fermée, et sont uniformément répartis sur cette surface.



Ce sont des conditions idéales, rarement vérifiées en pratique.

# Méthode de Hoppe



# Algorithme de Hoppe

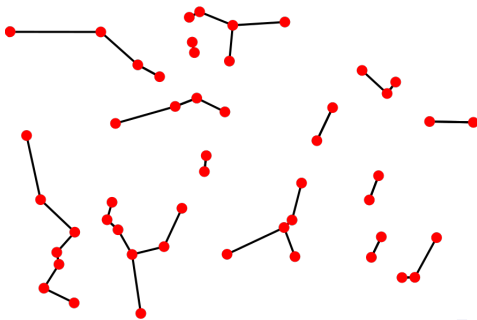
La reconstruction de la surface se fait par étapes :

- 1 estimation des plans tangents en chaque point par une analyse en composantes principales (PCA),
- 2 orientation consistante des plans tangents par parcours d'un arbre couvrant de poids minimal (MST),
- 3 calcul d'une distance signée entre les points d'une discrétisation régulière de l'espace de travail et leur plan le plus proche,
- 4 extraction d'une iso-surface et reconstruction 3D.

# Estimation du plan tangent

Depuis un ensemble de points dans un espace métrique, on construit le graphe des plus proches voisins (*nearest neighbor graph* ou NNG).

Un point  $p$  est relié à un point  $q$  si et seulement si  $q$  est le plus proche voisin de  $p$ .



# Estimation du plan tangent

On calcule un **plan tangent orienté**  $T_p(x_i)$  pour chaque point  $x_i$  de l'ensemble des points.

Ce plan est défini par un **point**  $o_i$  et une **normale**  $\hat{n}_i$ , qui sont calculés à partir de  $N_b(x_i)$  les  $k$ -voisins les plus proches de  $x_i$  :

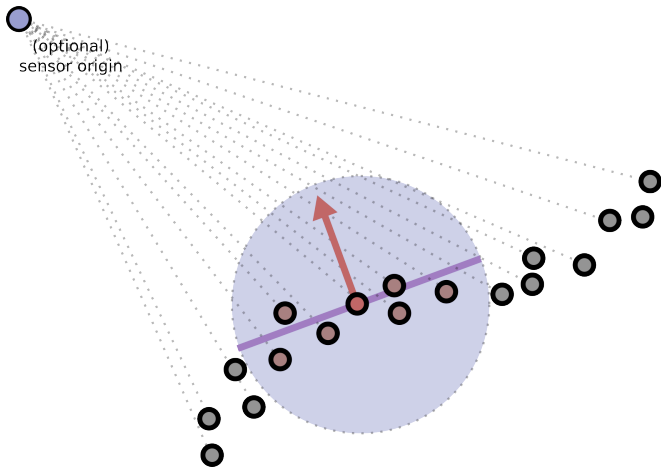
- $o_i$  : **centroïde** de  $N_b(x_i)$ ,
- $\hat{n}_i$  : par analyse en composantes principales,
  - construction de la matrice de covariance  $C_v$  de  $N_b(x_i)$ , centrée en  $o_i$ ,

$$C_v = \sum_{y \in N_b(x_i)} (y - o_i) \otimes (y - o_i)$$

- calculs des valeurs propres  $\lambda_{i,1} \geq \lambda_{i,2} \geq \lambda_{i,3}$  associées respectivement aux vecteurs propres  $\hat{v}_{i,1}$ ,  $\hat{v}_{i,2}$ ,  $\hat{v}_{i,3}$ ,

alors  $\hat{n}_i = \pm \hat{v}_{i,3}$ .

# Estimation du plan tangent





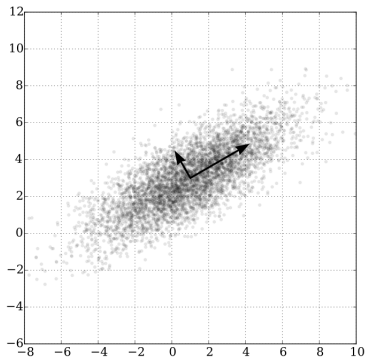
# Analyse en composantes principales (PCA)

Méthode d'analyse des données qui permet de résumer l'information en réduisant le nombre de variables. Ces nouvelles variables sont appelées **composantes principales** et sont, par construction, décorrélatées les unes des autres.

[Wiki] Approche à la fois :

- géométrique : les variables sont représentées selon des directions d'inertie maximale,
- statistique : la recherche porte sur des axes indépendants expliquant au mieux la variance des données.

# Analyse en composantes principales (PCA)



Le [théorème spectral](#), qui établit l'existence de décompositions privilégiées pour certains endomorphismes, repose sur l'existence de sous-espace propre (donc sur la recherche de valeurs et de vecteurs propres).

# Orientation consistante des plans tangents

Soit deux points d'un nuage  $x_i$  et  $x_j$  géométriquement proches, leurs plans tangents respectifs (définis par  $(o_i, \hat{n}_i)$  et  $(o_j, \hat{n}_j)$ ) sont presque parallèles i.e.  $\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j \approx \pm 1$ .

Si les plans sont orientés correctement alors  $\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j \approx +1$ , sinon l'une des deux normales doit être inversées.

- ▶ difficulté à trouver une orientation globale consistante.
- ▶ modélisation du problème comme un problème d'optimisation de graphe.

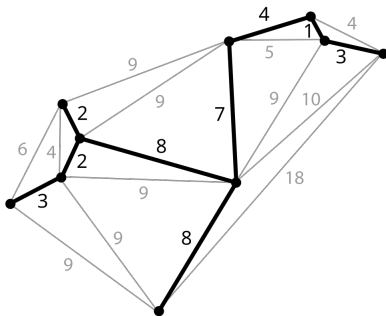
Le graphe est constitué de nœuds associés aux plans tangents et d'arêtes correspondant à des centres de plans tangents « suffisamment proches ». Le coût associé à chaque arête évalue le degré de consistance et vaut  $\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j$ .

- ▶ maximisation du coût total du graphe (NP-difficile).

# Orientation consistante des plans tangents

L'approximation induite repose sur la construction d'un arbre couvrant de poids minimal (ACM ou MST).

Un ACM d'un graphe est un arbre couvrant (arbre qui connecte tous les sommets ensemble) dont la somme des poids des arêtes est minimale.



# Orientation consistante des plans tangents

Fondamentalement, l'algorithme est simple : on s'appuie sur l'orientation d'un premier plan et on propage cette orientation aux voisins.

Cependant, si l'on souhaite favoriser une propagation qui se fait pour deux plans presque parallèles, il convient de modifier le coût associé aux arêtes du graphe qui devient :  $1 - |\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j|$ .

Ce coût est positif, minimal pour deux plans presque parallèles et induit une propagation qui suit les directions de faibles courbures, évitant les situations problématiques de propagation aux arêtes vives.

Le plan initial est celui qui possède le centre dont la coordonnée en  $z$  est la plus élevée, dont on force la normale dans le sens  $+Z$ . Puis, on traverse l'ACM en profondeur d'abord en changeant l'orientation d'une normale  $\hat{n}_j$  si  $\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j < 0$ .

# Fonction distance signée

La distance signée  $f(p)$  d'un point  $p \in \mathbb{R}^3$  d'une surface connue  $M$  est la distance entre  $p$  et le point  $z \in M$  le plus proche, multipliée par  $\pm 1$  suivant de quel côté de  $M$  se situe  $p$ .

Dans le cas présent, on ne connaît pas  $M$  mais on peut approximer ce calcul en s'appuyant sur les plans tangents :

- 1 recherche du plan tangent  $T_p(x_i)$  dont le centre  $o_i$  est le plus proche de  $p$ ,
- 2 calcul de la distance signée entre  $p$  et sa projection  $z$  sur le plan tangent  $T_p(x_i)$  :

$$f(p) = (p - o_i) \cdot n_i, \quad \forall p \in \mathbb{R}^3$$

## Fonction distance signée

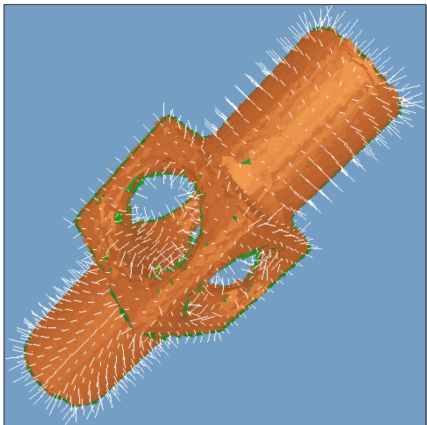
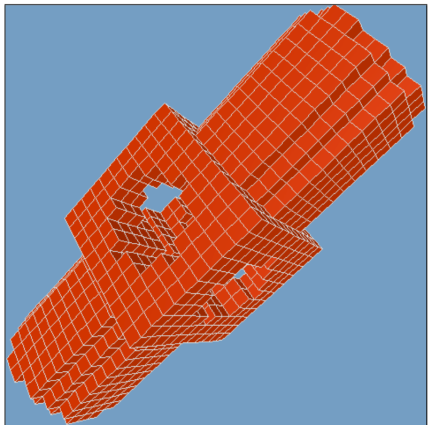
Si la surface  $M$  n'avait pas de frontière, ce calcul serait correct.  
Mais il s'agit de l'approximation d'une surface,  $\rho$ -dense et  $\delta$ -bruitée.

Dans l'hypothèse d'absence de bruit, un point  $z$  tel que  $d(z, X) > \rho$  ne peut être un point de  $M$  puisqu'elle est  $\rho$ -dense.

Si l'échantillon est bruité, un point  $z$  ne peut être un point de  $M$  si  $d(z, X) > \rho + \delta$ . Si la projection  $z$  de  $p$  est telle que sa distance est supérieure à  $\rho + \delta$ , alors  $f(p)$  est indéfinie.

► création de discontinuités, ignorée dans le cas présent.

# Fonction distance signée

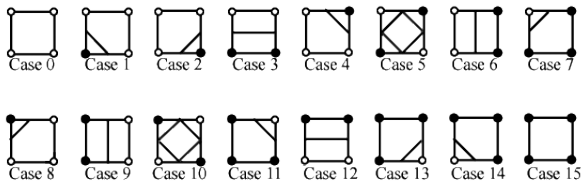
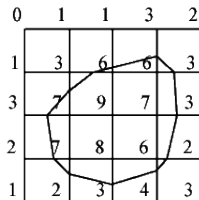




# Reconstruction de la surface

Cette reconstruction repose sur la notion d'extraction d'une isosurface depuis une fonction scalaire, basée ici sur une version modifiée des Marching Cubes.

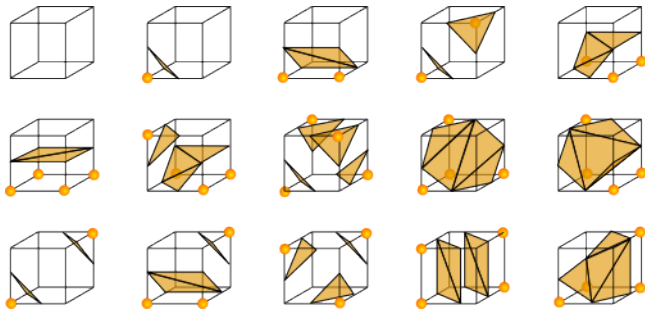
Illustration en 2D de l'approximation d'un isocontour avec les Marching Squares :



# Marching Cubes [Lorensen, Cline 1987]

Modélisation d'un objet polygonal à partir du champ scalaire 3D généré par approximation d'une isosurface.

256 valeurs d'un tableau de configuration des polygones sont précalculées par réflexion et symétrie à partir de 15 cas possibles :



# Algorithme des Marching Cubes

## Marching Cubes

**pour** *chaque sommet d'un cube unité* **faire**

    déterminer si il est a l'interieur (resp. a l'exterieur) de  
    l'isosurface

    mettre a 1 (resp. a 0) le bit correspondant d'un mot de 8  
    bits

**fin**

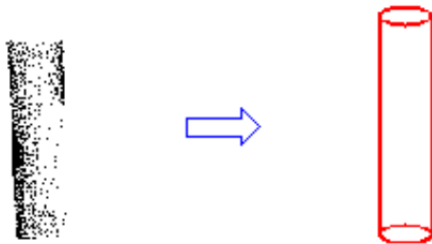
le nombre entier obtenu est l'index de la configuration requise  
chaque sommet des polygones ainsi générés est placé à sa  
position finale par interpolation linéaire

# Plan

- 1 Structuration, segmentation
- 2 Représentation explicite
- 3 Représentation implicite
- 4 Modèles**

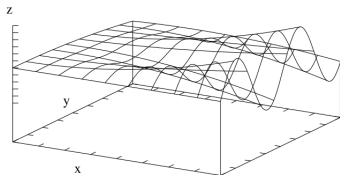
# Expression générale du problème

Etant donné un ensemble de points, il s'agit de déterminer les paramètres du modèle, de type connu, qui s'ajuste « au mieux » sur les points.



# Différents types de modèles

Surfaces polynomiales :  $z = f(x, y)$ .



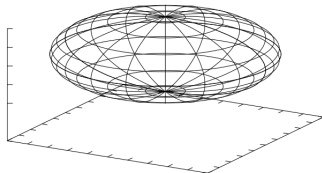
Dans le cadre de la segmentation purement 2,5D on utilise le plus souvent ce type de modèle, qui exploite la structure de grille.

Parmi les primitives, seul le plan peut être exactement représenté par ce type de surface.

Toute surface suffisamment lisse peut être approchée localement par de telles fonctions, dans un repère local, par un développement de Taylor.

# Différents types de modèles

Surfaces algébriques (ou implicites) :  $f(x, y, z) = 0$ .



Elles forment une classe de surfaces plus vaste, contenant la classe des surfaces bivariées précédentes.

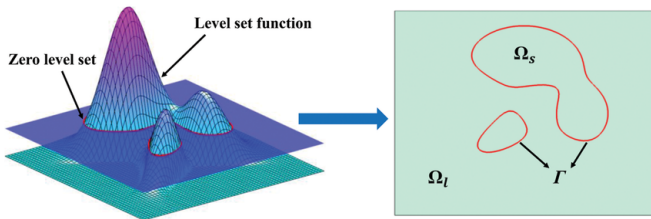
En particulier, les quadriques implicites sont contenues dans cette classe de modèles : plan ( $ax + by + cz + d = 0$ ), sphère ( $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ ), cylindre ( $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ), ...

Ces équations sont obtenues à partir des distances d'un point à chaque primitive et s'écrivent sur la base polynomiale des quadriques ( $1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2$ ).

# Différents types de modèles

**Surfaces implicites non algébriques** :  $f(x, y, z) = 0$  où  $f$  n'est pas un polynôme<sup>2</sup>.

**Modèles déformables** : courbes et surfaces de niveaux (level set), ou modèles déformables (par EDP). On trouve dans cette catégorie les notions de contours actifs, snakes, etc. Ces modèles sont notamment utilisés en imagerie médicale.



2. par exemple un exposant qui n'est pas un entier naturel.



# Différents types de modèles

**Surfaces définies par des critères géométriques** : définition de primitives à l'aide de caractérisations géométriques (le plan peut être défini par un produit scalaire constant, le cylindre par une distance constante par rapport à un axe, etc.). Ceci donne lieu dans le cas général à des équations implicites non-polynomiales.

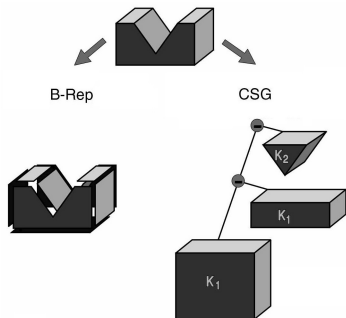
**Surfaces paramétrées** : la CAO utilise des définitions paramétrées pour les surfaces, comme par exemple les splines, les B-splines, et les NURBS.

**Objets catalogués** : modèles d'objets parmi un ensemble fini et connu (c'est-à-dire un catalogue).

# Différents types de modèles

## Modèles CAO plus complexes :

- B-Rep (*Boundary Representation*) ou représentation par frontières,
- CSG (*Constructive Solid Geometry*) ou représentation par volume et opérations ensemblistes,
- modèles CAO articulés.



# L'ajustement de modèle

L'ajustement est une tâche importante, qui intervient dans l'extraction, la reconnaissance et la segmentation de scènes à partir de modèles.

Suivant les domaines, les méthodes de ce type peuvent être nommées différemment.

Par exemple, l'ajustement de surfaces  $z = f(x, y)$  correspond à la notion de régression utilisée en statistiques. Le terme d'approximation est également utilisé.

# Ajustement par moindres carrés

Etant donné un ensemble de points, il s'agit de déterminer les paramètres du modèle, de type connu, qui s'ajuste « au mieux » sur les points.

**Méthode des moindres carrés** : consiste à chercher le vecteur paramètre  $a$  du modèle  $M$  qui minimise la somme des carrés des écarts des points  $x_i$  au modèle :

$$\sum_{i=1}^N d(x_i, M_a)^2$$

Cette méthode est conceptuellement assez simple et répond souvent efficacement au problème.

# Ajustement par moindres carrés

Résolution direct du problème de minimisation (problème linéaire, inversion de matrice, extraction des éléments propres d'une matrice symétrique réelle) :

- droite 3D,
- surfaces algébriques ( $P(x, y, z) = 0$  où  $P$  est un polynôme : plan, sphère, quadrique),
- surfaces de Monge polynomiales ( $z = P(x, y)$  où  $P$  est un polynôme).

Si la distance euclidienne au modèle ne présente pas cette propriété intéressante, on se ramène à une approximation de celle-ci qui conduit à la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire (par la méthode de Newton par exemple).