

# Maillages

Christian Nguyen

Département d'informatique  
Université de Toulon

# Introduction

On distingue :

- les **maillages structurés** (maillages curvilignes, transfinis, elliptiques),
- les **maillages non-structurés** (triangulation de Delaunay, avance de front),
- les **maillages hybrides** (décomposition spatiale).

Les maillages structurés sont issus de transformations d'un espace paramétrique  $(u, v)$  à un espace physique  $(x, y)$ . La génération du maillage se ramène à une évaluation des fonctions  $x = f(u, v)$  et  $y = g(u, v)$ .

Ces approches sont limitées quant à la possibilité de mailler des géométries de formes diverses, ou bien présentent des discontinuités et ne seront pas étudiées dans ce cours.

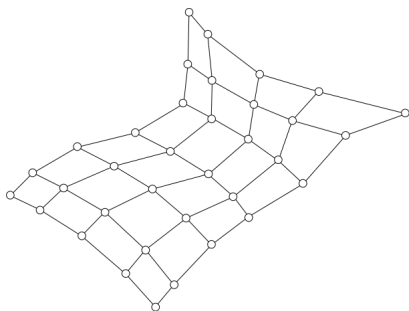
# Structure des maillages

L'information caractérisant un maillage comprend deux types : la géométrie (sommets) et le voisinage (connectivité entre les sommets).

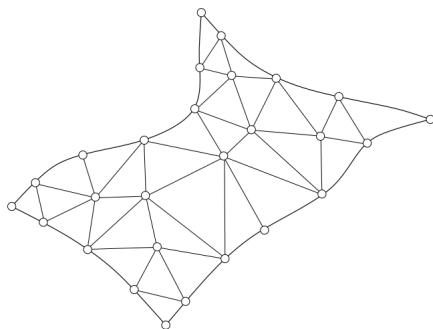
Maillage **structuré** : la connectivité est **implicite**, il existe une relation d'ordre implicite qui permet de déduire les voisins de la maille locale. Les éléments sont des quadrangles (2D) ou des hexaèdres (3D).

Maillage **non structuré** : la connectivité est **explicite**, il faut la préciser lors de la construction des éléments. Les éléments sont des triangles (2D) et de tétraèdres en (3D).

## Pour une même géométrie



Maillage structuré



Maillage non structuré

# Avantages des maillages non structurés

Pour les applications industrielles, on recherche des mailleurs :

- **automatiques** : chaque mailleur est dédié à un type d'élément accompagné des paramètres pertinents,
- **robustes** : la validité des paramètres de contrôle du mailleur est vérifiée,
- **génériques** : mailleur unique que le modèle géométrique à mailler soit simple ou complexe,
- **adaptatifs** : contrôle local de la densité et de l'éclatement du maillage.

Les mailleurs non structurés offrent des avantages définitifs en ce qui concerne :

- la représentation de géométries topologiquement complexes,
- le contrôle local de la densité du maillage,
- les possibilités d'adaptation.

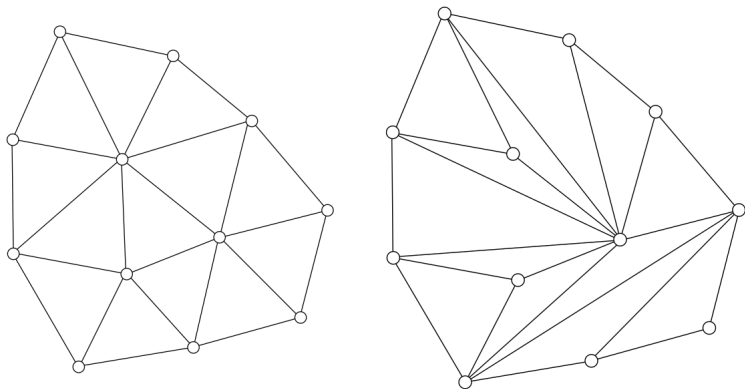
# Inconvénients des maillages non structurés

La **connectivité** étant **explicite**, elle doit être construite lors du processus de génération du maillage, ce qui nécessite plus d'espace mémoire et d'espace disque.

L'aspect non structuré a d'autres inconvénients :

- les calculs utilisent un nombre variable de voisins autour d'un sommet ;
  - les maillages sont plus difficiles à générer, à visualiser, à développer ;
  - les opérations géométriques sont plus complexes (localisation, distance à la paroi, etc.)
- les solveurs utilisent des structures de données plus complexes et sont plus lents.

# Maillages non structurés



Deux triangulations (13 triangles) d'un même ensemble de (12) points.

# Plan

- 1 Topologie et géométrie
- 2 Triangulation de Delaunay



# Modèles géométrique et topologique

Un **modèle géométrique** comprend plusieurs entités : sommets, arêtes, faces et volumes.

On les regroupe selon :

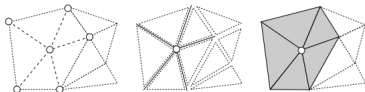
- la géométrie : description de la position et de la forme des objets du modèle dans l'espace physique,
- la topologie : connexions ou liens entre les objets du modèle (des références).

Tout comme pour un modèle géométrique, un **maillage** comprend une composante géométrique et une composante topologique :

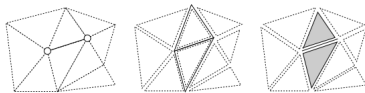
- **géométrie** : **description** des éléments, c'est-à-dire leur position dans l'espace, leur forme (un point, un segment ou une face.)
- **topologie** : les **connexions** entre les divers éléments du maillage.

# Modes de représentation

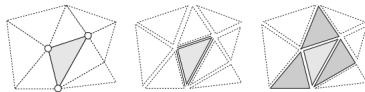
Selon le choix de la représentation, le type et la dimension, les entités d'un maillage sont constituées de sommets, d'arêtes ou d'éléments (ou cellules).



Différences finies : sommets et leurs voisins (S, A, E)



Volumes finis : arêtes et leurs voisins (S, A, E)



Éléments finis : éléments et leurs voisins (S, A, E)

# Conformité topologique d'un maillage

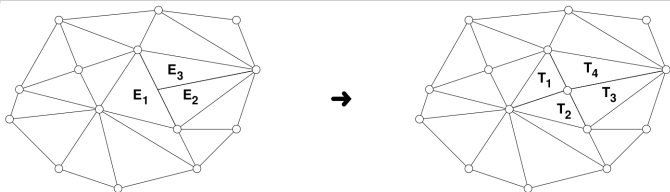
La **topologie** d'un maillage est un **graphe des connexions entre les sommets** du maillage, donc sans égard pour leurs coordonnées.

Les **sommets** du graphe sont groupés par sous-ensembles, appelés éléments (2D : 3 arêtes (triangle) ou 4 (quadrilatère); 3D : 4 faces (tétraèdre), 5 (pyramide), 6 (prisme) ou 8 (hexaèdre)).

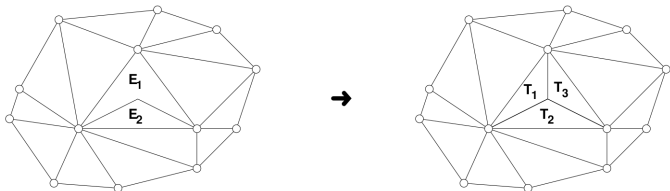
Tout élément d'une triangulation est d'intérieur topologiquement non vide, c.-à-d. chaque élément est composé de sommets différents.

▶ **calculs géométriques** : pas d'erreur de calcul ni de problème de précision arithmétique.

# Conformité topologique d'un maillage



sommet isolé : non conforme



éléments superposés : non conforme

► solution : changer la connectivité entre les sommets.

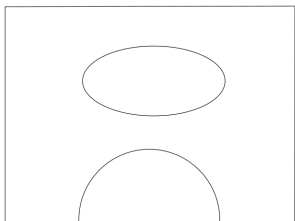
# Conformité géométrique d'un maillage

Un maillage constitue une discrétisation valide si il recouvre l'ensemble du domaine  $\Omega$ , sans vides ni chevauchements des éléments.

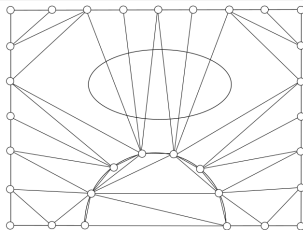
On parle de **maillage conforme** lorsque :

- l'union des éléments est égal à l'adhérence du domaine  $\Omega$  i.e. tous les éléments sont à l'intérieur des frontières du domaine,
  - l'intersection de deux éléments doit être soit un ensemble vide, un sommet, une arête ou une face (en 3D).
- ▶ tout élément est d'aire (en 2D) ou de volume (en 3D) strictement positif.

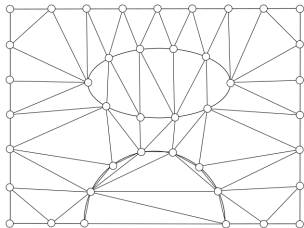
# Conformité géométrique d'un maillage



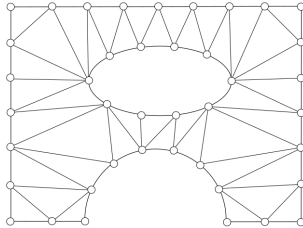
domaine initial



adhérence trou



exclusions



maillage conforme

# Caractéristique d'Euler-Poincaré

C'est un invariant numérique notée  $\chi$  définie par

$$\chi = S - A + F$$

Pour un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  connexe, homotope à un point<sup>1</sup>, la caractéristique  $\chi(M)$  d'un maillage  $M$  est égale à 1. Elle ne dépend pas du maillage mais seulement du domaine  $\Omega$ .

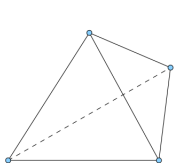
Pour un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , il est égale à 2 pour tous les polyèdres (orientables de genre 0) qui ont la topologie d'une sphère, convexes ou pas.

► Cette relation permet de vérifier la validité d'un maillage.

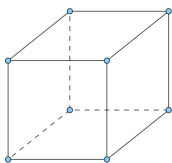
---

1. sans trou, avec une seule composante connexe

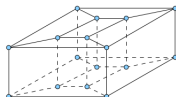
# Caractéristique d'Euler-Poincaré



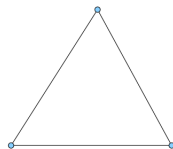
Sphere ( $\chi = 2$ )  
 $n = 4, n_e = 6, n_f = 4$



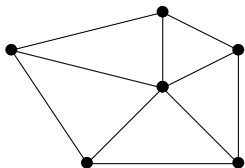
Sphere ( $\chi = 2$ )  
 $n = 8, n_e = 12, n_f = 6$



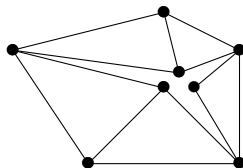
Torus ( $\chi = 0$ )  
 $n = 16, n_e = 32, n_f = 16$



Disk ( $\chi = 1$ )  
 $n = 3, n_e = 3, n_f = 1$



$$S - A + F = 1$$



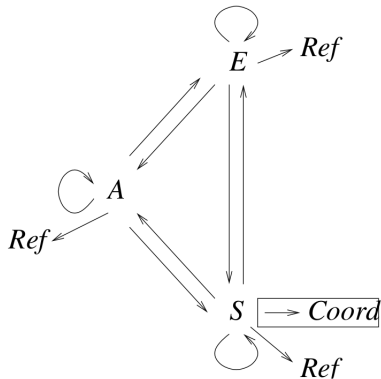
$$S - A + F = 0$$



# Connectivités

Soit un maillage triangulaire en 2D : S (sommets), A (arêtes), E (éléments triangulaires), Ref (référence) et Coord (coordonnées des sommets).

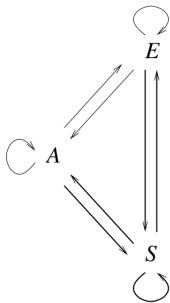
Une **connectivité** est une connexion entre objets du maillage (sauf celle vers les coordonnées qui correspond à la composante géométrique du maillage).



# Connectivité minimale

Considérons uniquement les connectivités entre les sommets, les arêtes et les éléments (références).

Soit  $C_{min}$ , une connectivité contenant les sommets, on en déduit les relations  $S \rightarrow E$ ,  $E \rightarrow S$ ,  $S \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow S$  et  $S \rightarrow S$ .



▶ la connaissance de la seule connectivité  $C_{min}$  est suffisante pour déduire toutes les autres.

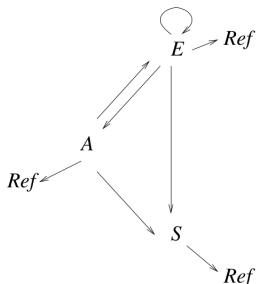
▶ la table de connectivité  $E \rightarrow S$  est la table à établir.

# Connectivités directes

Une connectivité directe est une connectivité dont les dimensions sont fixes.

Les connectivités directes sont :

- $E \rightarrow S$  (3, E)
- $E \rightarrow E$  (3, E)
- $A \rightarrow S$  (2, A)
- $E \rightarrow A$  (3, E)
- $A \rightarrow E$  (2, A)
- $S \rightarrow Ref$  (S, 1)
- $A \rightarrow Ref$  (A, 1)
- $E \rightarrow Ref$  (E, 1)

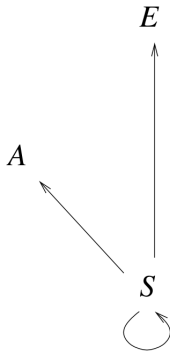


# Connectivités inverses

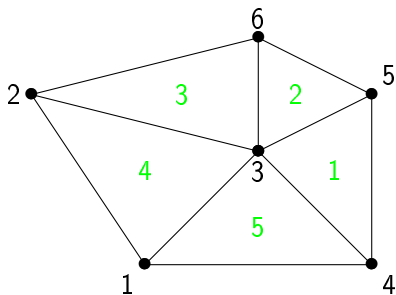
Les connectivités inverses sont  $S \rightarrow S$ ,  $S \rightarrow A$ ,  $S \rightarrow E$ . Une connectivité inverse est une connectivité dont les dimensions sont variables.

Les dimensions sont variables car il y a un nombre variable de sommets, d'arêtes et d'éléments autour d'un sommet.

Cependant, pour un maillage triangulaire, elles sont *en moyenne* les mêmes que les dimensions des connectivités directes correspondantes.

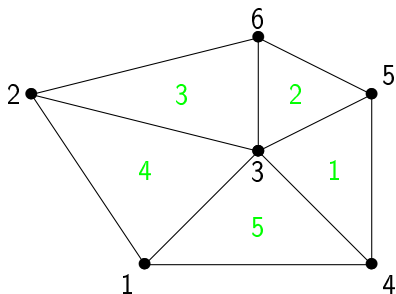


# Exemple de connectivité directe



$E$	$E \rightarrow S$
1	3, 4, 5
2	3, 5, 6
3	2, 3, 6
4	1, 3, 2
5	1, 4, 3

# Exemple de connectivité inverse



$S$	$n$	$S \rightarrow E$
1	2	4, 5
2	2	3, 4
3	5	1, 2, 3, 4, 5
4	2	5, 1
5	2	1, 2
6	2	2, 3

# Structure de données

Il y a deux questions :

- 1 Quelles connectivités faut-il stocker en mémoire ?
- 2 Quelles structures de données (vecteurs, liste chaînées, arbre binaires, etc) doit-on utiliser pour stocker ces connectivités ?

Le but du choix d'une structure de données est de trouver le **compromis optimal** entre :

- l'espace mémoire,
- la facilité de programmation,
- la facilité de maintenir à jour la structure de données lors d'une modification locale au maillage.
- le temps de calcul nécessaire pour retrouver les connectivités qui n'ont pas été stockées.

## Structure de données

La triangulation d'un ensemble fini  $S = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{R}^2$  de  $n$  points distincts dans le plan, conduit à (avec  $n_h$  arêtes à la frontière) :

- $n_f = 2(n - 1) - n_h$  triangles,
- $n_e = 3(n - 1) - n_h$  arêtes,
- $n_{vf} = 6 - \frac{3n_h+6}{n}$  triangles et  $n_{ve} = 6 - \frac{2n_h+6}{n}$  arêtes au voisinage d'un point.

Pour  $n \gg n_h$ , le nombre de connectivités s'établit à :

- $\approx 42n$  si l'on mémorise tous les objets et leurs connexions,
- $\approx 33n$  si l'on mémorise les arêtes et leurs connexions,
- $\approx 15n$  si l'on mémorise les faces et leurs connexions,
- $\approx 9n$  si l'on mémorise uniquement les sommets de chaque triangle.



# Plan

- 1 Topologie et géométrie
- 2 Triangulation de Delaunay

# Historique

En 2D, Dirichlet (1805–1859) a montré qu'à partir d'un nuage de points, on peut **partitionner le plan en cellules convexes** en se basant sur des critères de proximité.

Voronoi (1868–1908) a étendu les travaux de Dirichlet en ND et traduit la notion de proximité en celle de **cellule polygonale** ou diagramme de Voronoi.

Delaunay (1890–1980) a montré comment obtenir une triangulation comme le **dual des diagrammes de Voronoi**.

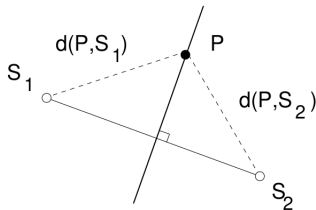
# Médiatrice

Soit

$S_1$  et  $S_2$ , deux sommets  
dans  $\mathbb{R}^2$ ,

$\overline{S_1 S_2}$  le segment de droite  
reliant  $S_1$  et  $S_2$ ,

$d(S_1, S_2)$  la distance  
euclidienne entre  $S_1$  et  $S_2$   
dans le plan.



La médiatrice  $\mathcal{M}(S_1, S_2)$  est le lieu des points équidistants de  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\mathcal{M}(S_1, S_2) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, S_1) = d(P, S_2)\}$$

Géométriquement, il s'agit de la bissectrice perpendiculaire du segment entre deux sommets.

# Partition du plan

La médiatrice sépare les points du plan en **deux régions** : la 1ère comprend les points qui sont plus proche de  $S_1$ , et la 2nde ceux qui sont le plus proche de  $S_2$ .

Ceci permet d'associer une région de l'espace à un nœud en particulier.

Tous les points du plan sont associés à l'un ou l'autre des deux nœuds, soit  $S_1$  ou  $S_2$ . Cette association découle de la notion de proximité qui dépend de la façon de calculer les **distances**.

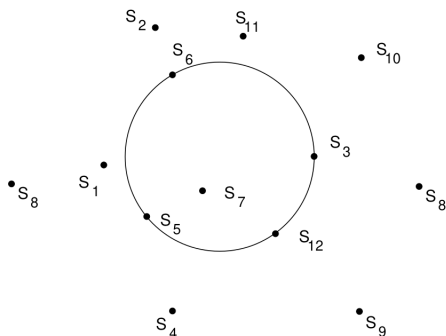
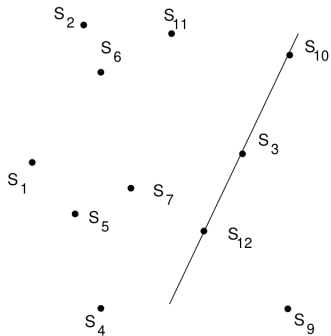
Cette partition s'applique également en dimension 3.

# Distribution régulière de sommets

Soit  $S = \{S_i\}_{i=1\dots N}$  un nuage de  $N$  sommets.

Une distribution régulière de sommets suppose qu'il n'y a pas :

- 3 sommets colinéaires,
- 4 sommets cocycliques.



# Cellule de Voronoï

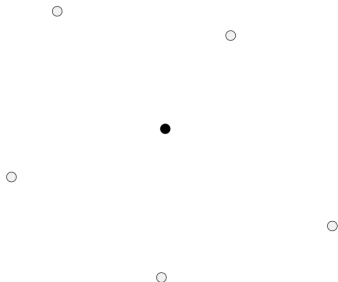
Définition : la cellule de Voronoï  $\mathcal{C}(S_i)$  associée au sommet  $S_i$ , est le lieu des points de l'espace qui sont plus proche de  $S_i$  que de tout autre sommet :

$$\mathcal{C}(S_i) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, S_i) \leq d(P, S_j), \forall j \neq i\}$$

Quelle est la forme de cette cellule ?

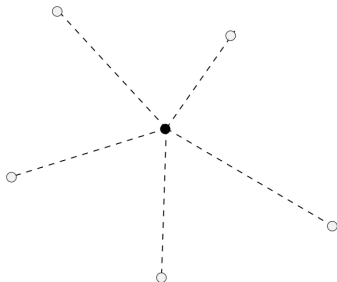
# Construction d'une cellule de Voronoï

On partitionne le plan avec chacune des médiatrices  $\mathcal{M}(S_i, S_j)$  entre le sommet  $S_i$  et chacun des sommets  $S_j$  qui l'entourent.



# Construction d'une cellule de Voronoï

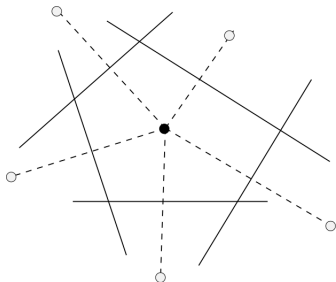
On partitionne le plan avec chacune des médiatrices  $\mathcal{M}(S_i, S_j)$  entre le sommet  $S_i$  et chacun des sommets  $S_j$  qui l'entourent.





# Construction d'une cellule de Voronoï

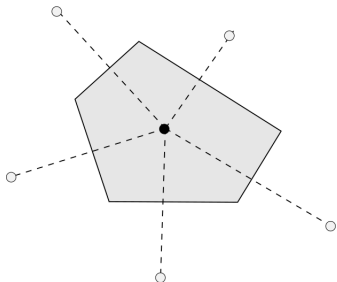
On partitionne le plan avec chacune des médiatrices  $\mathcal{M}(S_i, S_j)$  entre le sommet  $S_i$  et chacun des sommets  $S_j$  qui l'entourent.



Cette portion du plan délimitée par ces médiatrices  $\mathcal{M}(S_i, S_j)$  donne le lieu des points de l'espace qui sont plus proche de  $S_i$  que de tout autre sommet  $S_j$ .

# Construction d'une cellule de Voronoï

On partitionne le plan avec chacune des médiatrices  $\mathcal{M}(S_i, S_j)$  entre le sommet  $S_i$  et chacun des sommets  $S_j$  qui l'entourent.



Cette portion du plan délimitée par ces médiatrices  $\mathcal{M}(S_i, S_j)$  donne le lieu des points de l'espace qui sont plus proche de  $S_i$  que de tout autre sommet  $S_j$ .

Ce concept permet d'associer une portion de l'espace à un nœud donné.

# Cellule de Voronoï

Ce sont des polygones en 2D, des polyèdres en 3D, des N-polytopes en ND.

Elles sont convexes et recouvrent l'espace sans chevauchement.

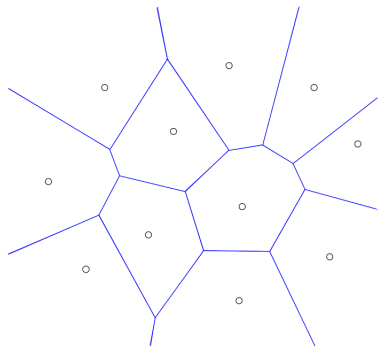
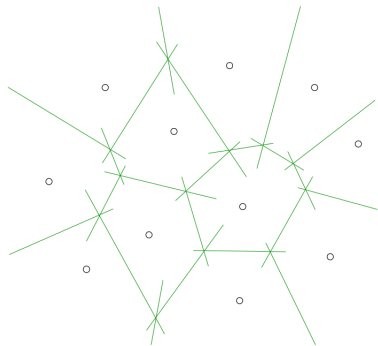
Elles sont fermées si elles sont entourées de sommets, sinon elles peuvent être ouvertes.

Les sommets du polygone de Voronoï se trouvent à l'intersection de trois médiatrices.

Les points qui ont servis à la construction du diagramme de Voronoï se trouvent au barycentre de ces cellules.

# Diagramme de Voronoï

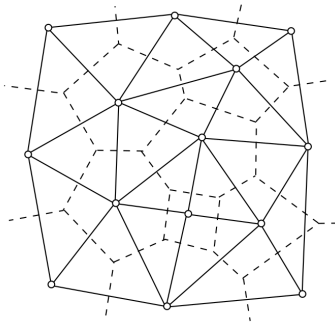
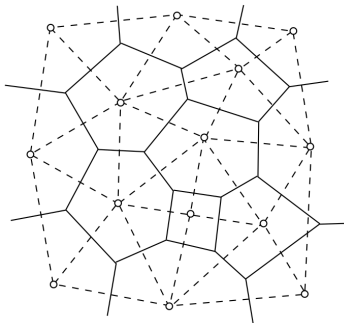
L'ensemble des cellules de Voronoï associées à l'ensemble des sommets du nuage de sommets forme le **diagramme de Voronoï**.



# Cellules de Voronoï et triangulation

Delaunay : une triangulation est le **dual** d'un diagramme de Voronoï (en reliant le centroïde de chaque cellule avec celui de chacune des cellules voisines).

Le critère de la **sphère vide** pose que le cercle (sphère) circonscrit aux sommets des triangles (tétraèdres) composant la triangulation ne contient aucun autre sommet.



# Triangulation de Delaunay

De par sa construction, il en découle les propriétés suivantes pour les éléments :

- ce sont des simplexes<sup>2</sup>,
- ils constituent un recouvrement de l'espace et ne se chevauchent pas,
- ils respectent la propriété max-min qui maximise l'angle le plus petit.

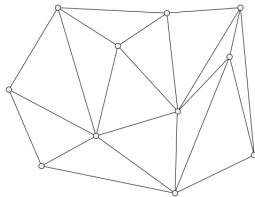
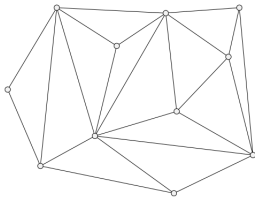
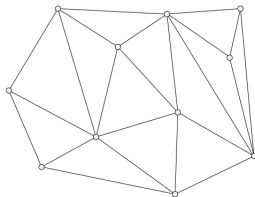
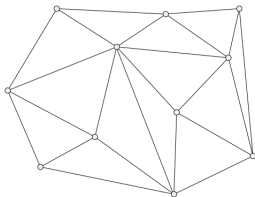
On retient trois propriétés dérivées de ces résultats théoriques qui sont critiques dans le développement d'algorithmes de génération de maillages :

- dualité entre polygone de Voronoï et triangulation de Delaunay,
- triangulation “équilatérale” ou propriété max-min,
- critère de la sphère vide.

2. généralisation du triangle à une dimension quelconque. 

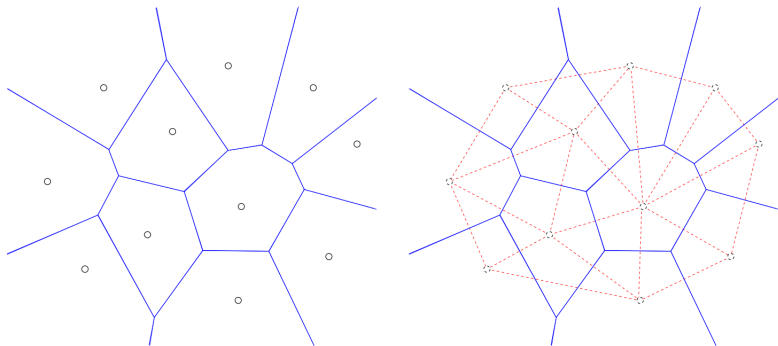
# Triangulations diverses

Le même nuage de points peut se trianguler de **plusieurs façons** différentes.



# Triangulation unique

Parmi toutes ces possibilités, il y a une triangulation qui est basée sur le diagramme de Voronoï.



Cette triangulation dite de Delaunay est **unique**, et donne l'enveloppe convexe du nuage de points.



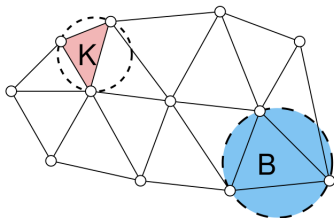
# Critère de la sphère vide

Soit

$\tau$  une triangulation d'un ensemble de nœuds,

$K$  un simplexe (triangle en 2D, tétraèdre en 3D) de cette triangulation,

$B$  la boule (disque en 2D, sphère en 3D) passant par les  $N + 1$  sommets du simplexe  $K$ .

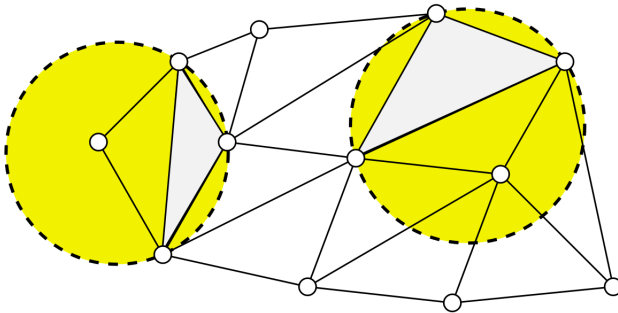


Un simplexe  $K$  vérifie le **critère de la sphère vide**, si la boule ouverte circonscrite au simplexe  $K$  est vide<sup>3</sup> (i.e. ne contient aucun sommet de la triangulation).

3. la boule fermée circonscrite au simplexe  $K$  contient uniquement les sommets du simplexe  $K$ .

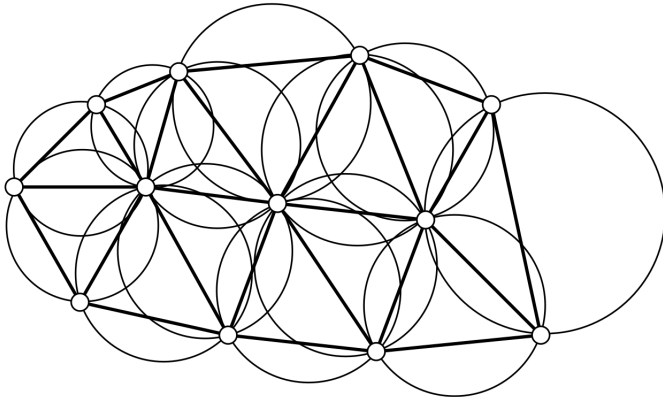
# Critère de la sphère vide

Un simplexe  $K$  ne vérifie pas le critère de la sphère vide, si la boule ouverte (resp. fermée) circonscrite au simplexe  $K$  n'est pas vide i.e. contient un ou plusieurs sommets de la triangulation (resp. contient d'autres sommets que ceux du simplexe  $K$ ).



# Critère de la sphère vide

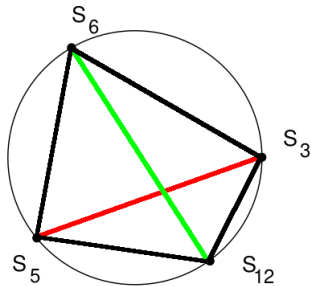
Si **tous** les éléments  $K$  d'une triangulation  $T$  vérifient le critère de la sphère vide, alors la **triangulation** est dite **de Delaunay**.



# Unicité

La triangulation de Delaunay  $\tau$  d'un nuage de points  $S$  est unique, **sauf** s'il y a quatre (resp. cinq) points cocycliques en 2D (resp. en 3D).

Ceci est illustré par le fait que quatre sommets cocycliques peuvent être reliés de deux façons.



# Noyau de Delaunay

Soit,

$S = \{S_i\}_{i=1\dots N}$  un nuage de  $N$  sommets.

$\mathcal{T}_i$  la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe des  $i$  premiers sommets de  $S$ .

On construit  $\mathcal{T}_{i+1}$  à partir de  $\mathcal{T}_i$  en ajoutant le sommet  $P = S_{i+1}$  :

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$

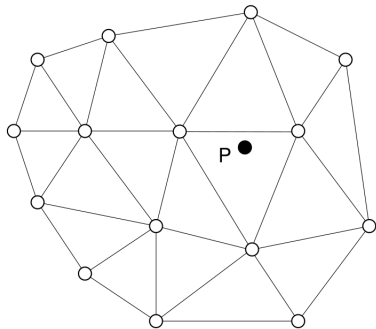
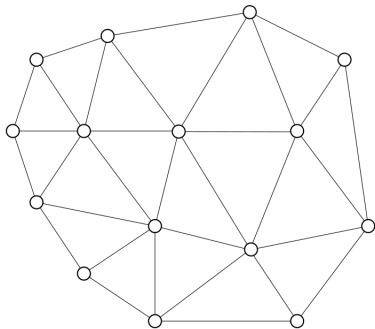
où la cavité  $\mathcal{C}_P$  est l'ensemble des éléments qui violent le critère de la sphère vide :

- 1 On retire  $\mathcal{C}_P$  et on relie  $P$  aux sommets du polygone de la cavité.
- 2 On construit la boule  $\mathcal{B}_P$  i.e. les éléments ayant  $P$  comme sommet.
- 3 On insère  $\mathcal{B}_P$  dans la triangulation, donnant  $\mathcal{T}_{i+1}$ .

alors  $\mathcal{T}_{i+1}$ , la triangulation obtenue avec le noyau de Delaunay en insérant le point  $P$  comme  $(i + 1)$ ième sommet, est une triangulation de Delaunay.

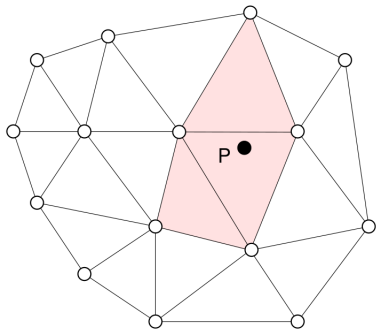
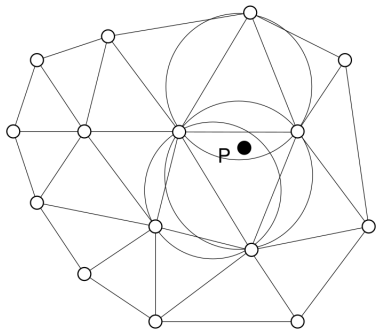
# Insertion d'un point

Procédure **incrémentale** : on modifie  $\mathcal{T}_i$ , une triangulation de Delaunay existante, en y insérant un nouveau sommet  $P$ .



# La cavité

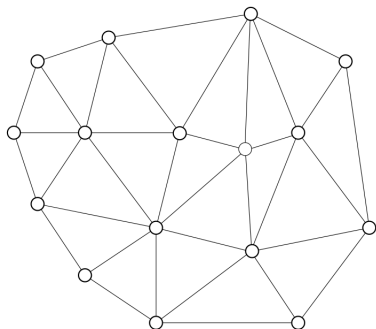
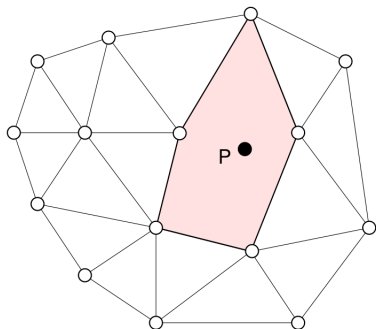
La cavité  $\mathcal{C}_P$  associée au sommet  $P$ , intérieur à  $\mathcal{T}_i$ , est l'ensemble des éléments de cette triangulation dont la boule circonscrite contient ce point.



# La boule

La boule  $\mathcal{B}_P$  associée à un point  $P$  est constituée de l'ensemble des éléments de la triangulation  $\mathcal{T}$  ayant  $P$  comme sommet.

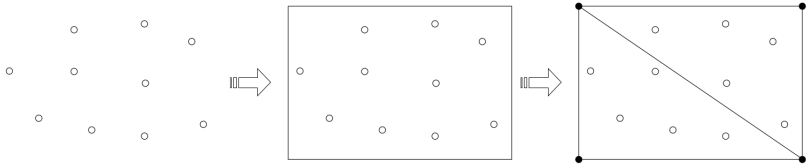
Elle est construite en connectant le point  $P$  aux sommets du périmètre de la cavité. Ce qui donne la nouvelle triangulation  $\mathcal{T}_{i+1}$ .





## Triangulation initiale

On utilisera comme triangulation de Delaunay initiale  $\mathcal{T}_0$ , la **boîte englobant** le nuage de sommets  $S$ .



Ceci nécessite l'ajout de quatre sommets, avec lesquels on construit le maillage initial  $\mathcal{T}_0$  composé de deux éléments.

Remarque : ces deux triangles vérifient le critère de la sphère vide, et ce premier maillage est un maillage Delaunay.

À la fin du procédé il faut retrancher tous les éléments reliés à la boîte englobante.