

Modélisation géométrique

Christian NGUYEN

Département d'informatique
Université de Toulon

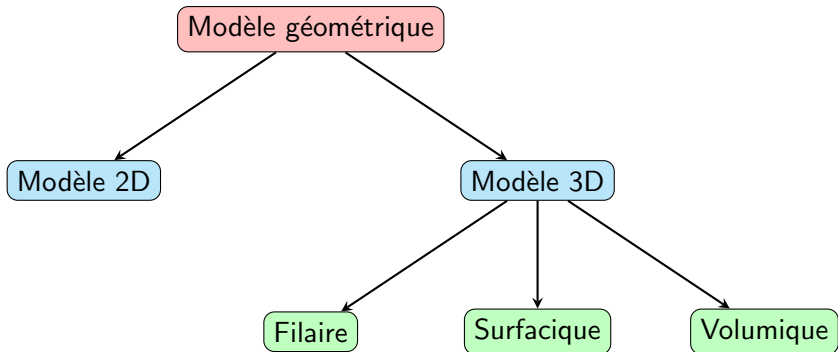
Introduction

La **modélisation géométrique** désigne l'ensemble des méthodes utilisées pour la définition et la représentation informatique de la géométrie des objets du point de vue de leurs formes et de leurs propriétés géométriques.

Dans un contexte de **simulation numérique**, la description d'un problème comprend l'analyse et la synthèse des formes géométriques.

Ceci implique d'autres fonctions telles que le calcul d'intersection, de projection, ou de discrétisation, d'ordonnancement des faces, etc. qui utilisent des informations contenues dans les modèles géométriques.

Modèles géométriques

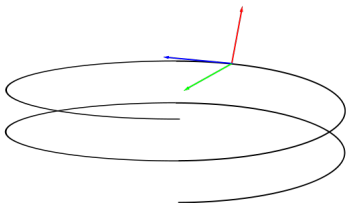


Variété

Manifold (Mannigfaltigkeit, Bernhard Riemann) : généralisation de la classification géométrique (courbe : variété de dimension 1 ; surface : variété de dimension 2, ...).

[Wikipédia] Courbes et surfaces de l'espace euclidien s'obtiennent à partir d'un « patron » plan et d'« instructions de collage ».

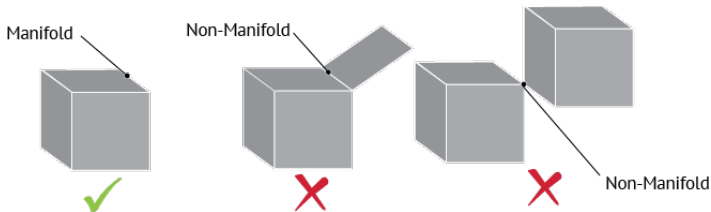
Exemple d'image en deux dimensions représentant une courbe, une variété de dimension 1, dans un espace de trois dimensions :



Manifold, non manifold

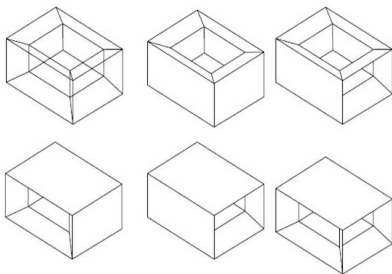
Appliquée à la modélisation 3D, une surface « manifold » définit un volume.

Dans le cas d'un polyèdre, un sommet doit être partagé par trois arêtes, une arête doit être partagée par deux faces, pour être classifié « manifold ». Sinon, il est dit « non manifold ».

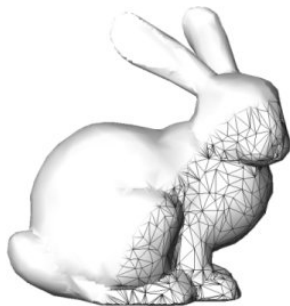


Causes « non manifold » : arête ou face « pendante », face interne, zone sans épaisseur.

Grandes familles

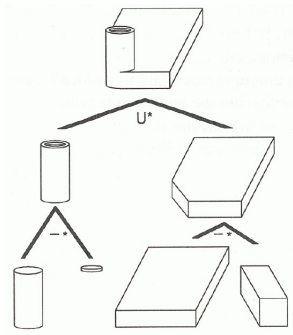


« fil de fer »

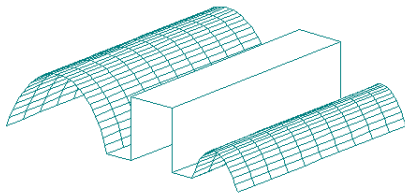


surfactive

Grandes familles



volumique

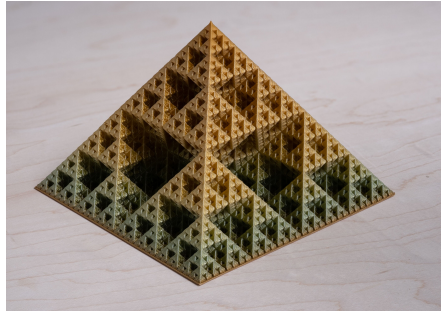


fonctionnelle

Grandes familles



système de particules



fractale

Plan

- 1 Représentation des courbes
- 2 Représentation polynomiale
- 3 Fonctions Splinaires
- 4 Fonctions de Bézier

Dans la géométrie classique, les courbes et surfaces sont caractérisées par des équations analytiques.

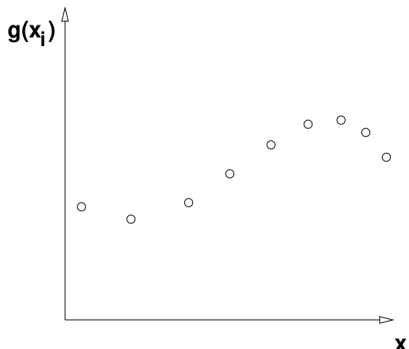
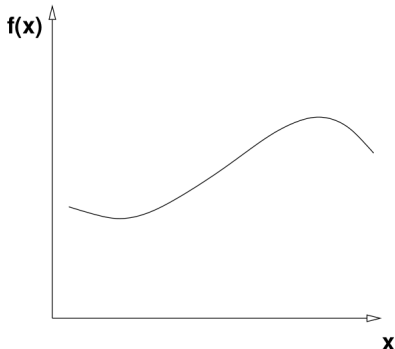
Dans la pratique, ces modèles sont insuffisants pour répondre aux besoins de la modélisation numérique (constructions automobile, navale, aéronautique, ...).

La **représentation discrète des frontières** se base sur un nombre fini d'informations (généralement des points) plutôt que sur une relation analytique.

Contrairement à un modèle continu, il faut donc utiliser une forme d'**interpolation** pour restituer la géométrie à des positions autres que ces points.

Représentation numérique

À l'aide d'un nombre fini de points x_i , on construit une approximation telle que : $g(x_i) \approx f(x)$.



Mesure de l'erreur

Les critères de qualité de l'approximation d'une fonction $f(x)$ par une fonction approximante $g(x)$ s'apparentent à la notion de distance ou de norme.

À partir de l'**erreur d'approximation**

$$e = |f(x) - g(x)|$$

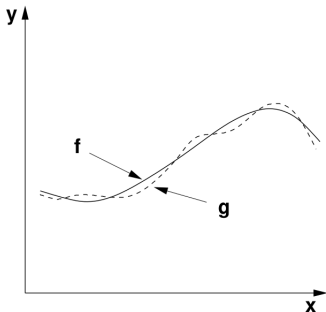
sur l'intervalle $x_0 \leq x \leq x_n$, on caractérise l'**erreur globale** avec les normes :

dans l'espace continu

$$\int_{x_0}^{x_n} |f(x) - g(x)|^2 dx$$

dans l'espace discret

$$\sum_{i=0}^n |f(x_i) - g(x_i)|^2$$



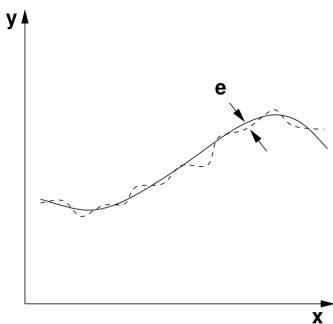
Autres critères

Les méthodes traditionnelles utilisent des **polynômes de collocation** dont l'ordre est égal au nombre de points moins un (pour une courbe).

Les caractéristiques de ces polynômes sont telles qu'ils **oscillent** entre les points de collocation.

À cause du caractère oscillatoire des polynômes d'approximation, la fonction approximante ne rend pas correctement l'allure de la courbe.

On peut obtenir une erreur plus faible en resserrant le critère d'erreur et en augmentant le nombre de points.



Définition d'une courbe

Courbe/surface : un ensemble de points dont les coordonnées (x, y) vérifient une relation.

$$F(\vec{x}) = 0$$

Représentation : ensemble des informations et structures informatiques qui décrivent une courbe.

Il existe plusieurs types de représentation de courbes : explicite, implicite, paramétrique.

Représentations des courbes planes

- 1 **représentation cartésienne**, i.e. les points $M = (x, y)$ de la courbe sont définis par une équation du type $y = f(x)$.

⇒ impossible de dessiner toutes les courbes !

Par exemple, un simple cercle ne peut pas être représenté de cette manière (f étant une fonction, il n'est pas possible de lui associer deux images).

- 2 **représentation implicite** de la courbe, en considérant les points $M = (x, y)$ solutions de l'équation $f(x, y) = 0$.

⇒ pas toujours possible de manière algébrique.

Si l'expression de f est trop compliquée, on ne peut résoudre l'équation en y (ou symétriquement en x).

Représentations courbes planes

- ③ choix d'une **représentation paramétrique** des points de la courbe :

$$M(u) = \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix}, \quad u \in I. \quad (1)$$

On a donc une application $M : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Ainsi, le cercle de rayon r et de centre $(0, 0)$ a pour représentation paramétrique :

$$M(u) = \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Autre avantage : définir naturellement une **orientation** de la courbe. En effet, l'application M étant définie sur un intervalle I de \mathbf{R} , l'orientation de la courbe est obtenue en faisant croître le paramètre u dans cet intervalle.

Représentation paramétrique

Contrairement à la représentation implicite, qui ne donne que la relation que doivent vérifier les coordonnées, la définition d'une courbe paramétrique est **constructive**.

Cette représentation donne la méthode pour calculer les coordonnées de l'ensemble des points c-à-d comment construire la courbe.

La forme paramétrique évite toutes les difficultés associées à la forme explicite ou à la forme implicite :

- de courbes fermées,
- des points de rebroussement,
- de pente infinie.

Droite paramétrique

Une droite d est caractérisée par l'un de ses points $A(a_1, a_2)$ et un vecteur $\vec{v}(v_1, v_2)$ définissant son orientation. Ce vecteur \vec{v} est appelé **vecteur directeur** de d .

L'ensemble de tous les points $M(x, y)$ du plan qui appartiennent à la droite d est caractérisé par l'**équation vectorielle paramétrique de la droite** suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k.\vec{v}$$

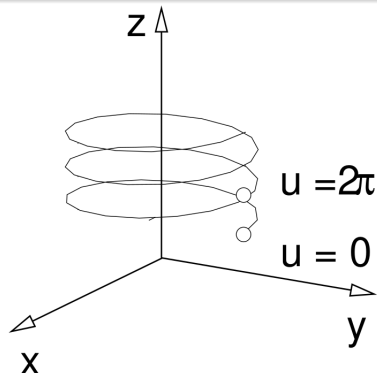
Que l'on peut représenter sous forme d'un système d'**équations paramétriques** :

$$\begin{cases} x = a_1 + k.v_1 \\ y = a_2 + k.v_2 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Spirale

La représentation paramétrique d'une spirale circulaire de rayon r est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = bu \end{cases}$$



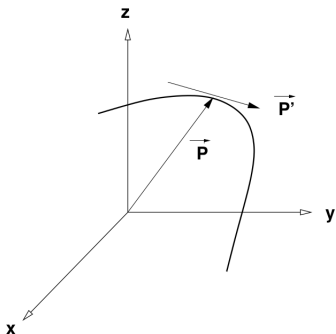
où le paramètre u peut s'interpréter comme l'angle du vecteur position avec l'axe des x et donne un pas égal à b pour :

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

Propriétés, vecteur tangent

Le **vecteur tangent** à une courbe est obtenu par la dérivée du vecteur position par rapport à u :

$$\vec{P}'(u) = \frac{d\vec{P}(u)}{du} = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right)$$



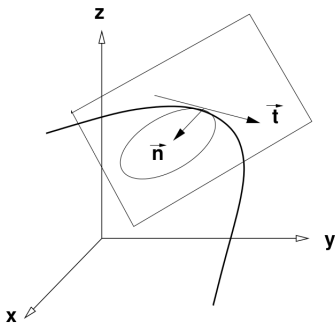
Propriétés, vecteur normal

La normale \vec{n} est un vecteur dirigé vers le centre du cercle tangent.

Pour les courbes planes, il y a unicité de la normale à la courbe, une simple rotation de $\pi/2$ de la tangente donne la normale.

Par contre, pour les courbes gauches, il existe une infinité de possibilités : tout vecteur perpendiculaire au vecteur tangent sera une normale à la courbe. On en privilégie une, celle située dans le plan osculateur^a.

a. plan affine qui « colle » au mieux à la courbe au voisinage de ce point.



Plan

- 1 Représentation des courbes
- 2 Représentation polynomiale**
- 3 Fonctions Splinaires
- 4 Fonctions de Bézier

Introduction

L'approximation d'une courbe se fait par combinaison linéaire de fonctions de base telles que les polynômes, les fonctions trigonométriques, etc.

$$f(u) = \sum_{i=0}^n c_i g_i(u)$$

Le choix des $g_i(u)$ dépend :

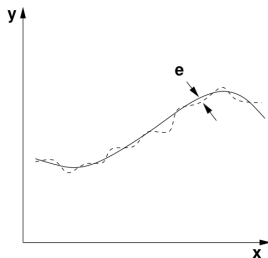
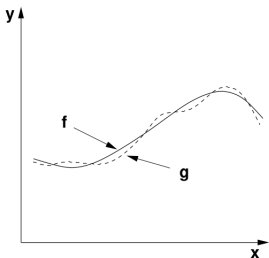
- de la facilité dans les manipulations de ces fonctions de base lors des développements,
- du coût des calculs pour les évaluations.

Dans cette optique, les polynômes présentent plusieurs avantages.

Fonction polynomiale

Une fonction polynomiale approxime une courbe par un nombre fini de points.

Pour une bonne approximation ce polynôme aura nécessairement un degré élevé, égal au nombre de points qu'il colloque (moins un).



► implique des **oscillations** dans la courbe générée.

Interpolation de Lagrange

Soit un ensemble de $n + 1$ points, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

On cherche un polynôme $p_n(x)$, de degré n interpolant ces $n + 1$ points (x_i, y_i) , de la forme :

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x)$$

Cette approximation s'interprète comme une **combinaison linéaire** des **polynômes de Lagrange** L_k , pondérés par les valeurs des données y_k .

Le k -ème polynôme de Lagrange L_k est l'**unique** polynôme qui vérifie :

x_i	x_0	x_1	\dots	x_k	\dots	x_n
$L_k(x)$	0	0	\dots	1	\dots	0

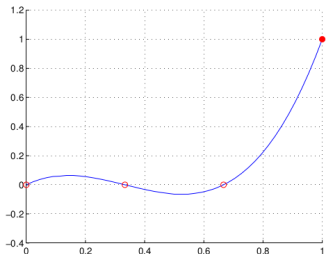
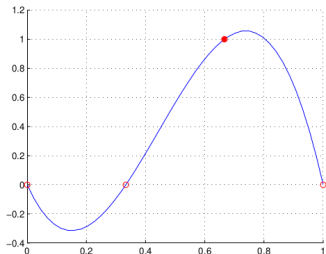
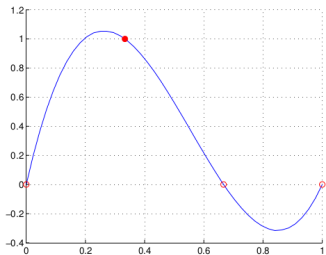
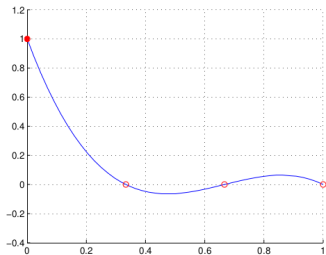
Interpolation de Lagrange

La caractéristique principale de ce polynôme L_k est qu'il s'annule à tous les points de collocation, sauf au point x_k , où il vaut 1.

Exemple : pour les 4 polynômes de degré 3 L_k , $k = 1 \dots 4$,

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\ &+ f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ &+ f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ &+ f(x_3) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{aligned}$$

Interpolation de Lagrange



Interpolation de Lagrange

On construit les $n + 1$ polynômes de Lagrange $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ à partir de l'écriture :

$$\prod_{i=0}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_k) \dots (x_k - x_{n-1})(x_k - x_n)}$$

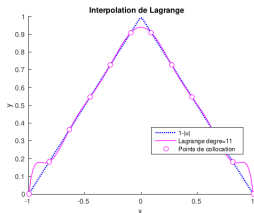
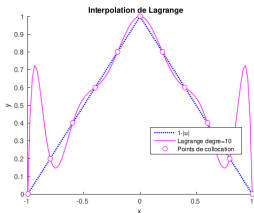
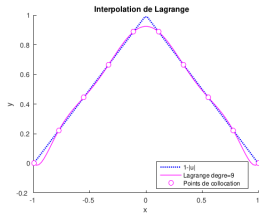
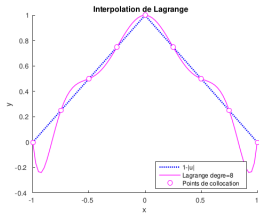
On note que le terme $(x - x_k)/(x_k - x_k)$ est indéterminé. En le retirant du produit, on obtient un polynôme de degré $(n - 1)$, $L_k(x_k) = 1$ et pour $i \neq k$, $L_k(x_i) = 0$:

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Finalement, le **polynôme d'interpolation** devient :

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

Exemple : $f(x) = 1 - |x|$



Inconvénients

Ce **comportement oscillatoire** découle de l'ordre généralement élevé du polynôme (et non de l'écart par rapport à la position).

La technique d'approximation doit être adaptée à la nature du problème et donner un meilleur rendu de l'allure générale de la courbe (pente, courbure, etc.).

Une solution est de combiner l'information locale et l'information globale, en utilisant des **morceaux de courbes** qui localement ont des degrés faibles et qui sont raccordés globalement.

Approximation par morceau

Dans l'approximation par morceaux, au lieu d'utiliser un seul polynôme, on en utilisera plusieurs qui seront raccordés selon des critères à déterminer.

En utilisant des morceaux qui sont des polynômes de degré faible on pourra éviter le problème des oscillations qui apparaissent avec des polynômes de degré élevé.

Représentation	Polynomiale	Par morceaux
Collocation	Lagrange	Spline cubique
Oscultation	Bézier, Bézier rationnelles	B-spline, NURBS

► base de la géométrie numérique moderne.

Conditions de raccord

Pour une bonne précision et régularité une approximation par morceaux doit :

- colloquer les n points de contrôle P_1, \dots, P_n ,
- fournir le degré de régularité désiré, ceci par les conditions de raccord C^i aux $n - 2$ points intérieurs :
 - C^0 pour la continuité,
 - C^1 pour la continuité du vecteur tangent,
 - ...
- les morceaux sont dérivables et ces dérivées sont continues.

Cubiques

Une classe de fonctions particulièrement pratique pour la représentation paramétrique est la classe des **polynômes de degré trois**, qui s'écrit :

$$x(u) = a_{0x}u^0 + a_{1x}u^1 + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3$$

$$y(u) = a_{0y}u^0 + a_{1y}u^1 + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3$$

$$z(u) = a_{0z}u^0 + a_{1z}u^1 + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$$

On exprime le vecteur position \vec{P} par :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^3 \vec{a}_i u^i$$

avec $\vec{a}_i = (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz})$

Coefficients algébriques

Dans la forme vectorielle :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^3 \vec{a}_i u^i$$

les quatre coefficients \vec{a}_i correspondent aux quatre degrés de liberté d'un polynôme de degré trois, et peuvent être déduits de quatre données sur la courbe.

Quoique pratiques pour caractériser la courbe, ces coefficients sont difficiles à interpréter géométriquement.

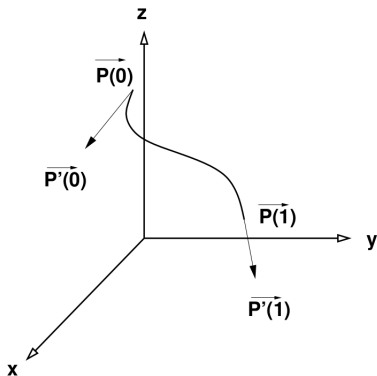
► on voudrait construire le polynôme à l'aide de certaines **propriétés géométriques**, faciles à interpréter et à appliquer ; par exemple, les **positions** ainsi que les **vecteurs tangents** aux extrémités.

Coefficients géométriques

Les quantités $\vec{P}(0)$, $P(1)$, $P'(0)$ et $P'(1)$ représentent les positions et vecteurs tangents au début ($u = 0$) et la fin ($u = 1$) de la courbe, respectivement.

Ce sont des données plus naturelles et plus intuitives que les coefficients algébriques pour décrire la courbe.

Pour exprimer le vecteur position \vec{P} en fonction de ces informations géométriques, il faut établir les relations entre ces quantités et les coefficients algébriques \vec{a}_j .



Vecteurs position et tangent

En évaluant le **vecteur position** et le **vecteur tangent** :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^3 \vec{a}_i u^i$$

$$\vec{P}'(u) = \sum_{i=1}^3 i \vec{a}_i u^{i-1}$$

aux **deux extrémités du segment**, c-à-d à $u = 0$ et $u = 1$, on obtient quatre équations :

$$P(0) = \vec{a}_0$$

$$P(1) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$P'(0) = \vec{a}_1$$

$$P'(1) = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$$

La solution de ce système donne les coefficients \vec{a}_i :

$$\vec{a}_0 = \vec{P}(0)$$

$$\vec{a}_1 = \vec{P}'(0)$$

$$\vec{a}_2 = -3\vec{P}(0) + 3\vec{P}(1) - 2\vec{P}'(0) - \vec{P}'(1)$$

$$\vec{a}_3 = 2\vec{P}(0) - 2\vec{P}(1) + \vec{P}'(0) + \vec{P}'(1)$$

En substituant dans :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^3 \vec{a}_i u^i = \vec{a}_0 u^0 + \vec{a}_1 u^1 + \vec{a}_2 u^2 + \vec{a}_3 u^3$$

on obtient une nouvelle écriture du polynôme :

$$\begin{aligned} \vec{P}(u) &= (2u^3 - 3u^2 + 1)\vec{P}(0) + (-2u^3 + 3u^2)\vec{P}(1) \\ &+ (u^3 - 2u^2 + u)\vec{P}'(0) + (u^3 - u^2)\vec{P}'(1) \end{aligned}$$

Polynôme d'Hermite

Ce résultat peut s'écrire sous la forme¹ :

$$\vec{P}(u) = H_1 \vec{P}(0) + H_2 \vec{P}(1) + H_3 \vec{P}'(0) + H_4 \vec{P}'(1)$$

où les H_i sont les **polynômes d'Hermite** définis par :

$$H_1 = 2u^3 - 3u^2 + 1$$

$$H_2 = -2u^3 + 3u^2$$

$$H_3 = u^3 - 2u^2 + u$$

$$H_4 = u^3 - u^2$$

En comparant ce résultat avec l'écriture polynomiale originale $\vec{P}(u) = \vec{a}_0 u^0 + \vec{a}_1 u^1 + \vec{a}_2 u^2 + \vec{a}_3 u^3$, on note qu'il s'agit d'un simple **changement de base**.

1. par abus d'écriture $H_i \equiv H_i(u)$

Interprétation

Ces deux expressions ont la forme matricielle suivante :

$$\vec{P}(u) = (x, y, z) = [B_1, B_2, B_3, B_4][A]$$

Le passage de la base u^i à la base H_j change les coefficients de la matrice $[A]$.

La même courbe s'exprime comme une **combinaison linéaire de coefficients**, qui s'interprètent différemment.

Dans le second cas, ceux-ci ont une **interprétation géométrique** : ce sont les positions et les vecteurs tangents des deux extrémités de la cubique, ce qui facilite une construction par morceaux.

Formes matricielles

Monômes

$$\vec{P}(u) = (x, y, z) = [1, u, u^2, u^3] \begin{bmatrix} a_{0x} & a_{0y} & a_{0z} \\ a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix}$$

Hermite

$$\vec{P}(u) = (x, y, z) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{bmatrix}$$

Passage d'une base vers une autre

$$[H_1, H_2, H_3, H_4] = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut combiner ces deux représentations, et on obtient :

$$\vec{P}(u) = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{bmatrix}$$

Cette écriture combine les avantages des deux formes :

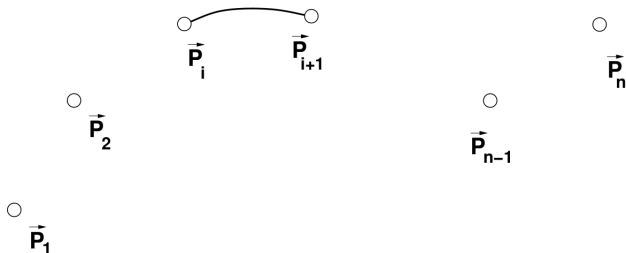
- d'une part, les coefficients ont une **interprétation géométrique**,
- d'autre part la forme se prête bien à un **calcul efficace** en évaluant les puissances de u^i une seule fois.

Plan

- 1 Représentation des courbes
- 2 Représentation polynomiale
- 3 Fonctions Splinaires**
- 4 Fonctions de Bézier

Approximation par morceau

On construit une **spline** par une suite de points de contrôle P_n , et sur chaque intervalle entre deux points successifs P_i et P_{i+1} , on définit un polynôme du degré choisi.

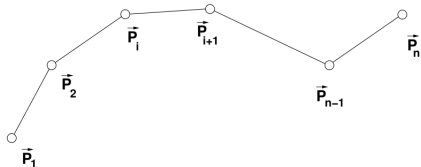


Une fonction splinaire est une représentation d'une courbe utilisant **plusieurs morceaux**, raccordés aux noeuds selon certaines **conditions de continuité**.

Régularité

La régularité de la courbe obtenue dépend du **degré des polynômes**, ainsi que des **conditions de continuité** imposées aux **points de raccordement**.

Exemple : pour des polynômes de degré un, la courbe est composée de segments de droites :



Comme le nombre de coefficients (degrés de liberté) pour chaque morceau est de deux, ceci ne permet que le raccordement le plus simple : C^0 (avec discontinuité de pente).

Degrés de liberté

Avec des polynômes de degré supérieur, le nombre de degrés de liberté augmente, ce qui permet un niveau de raccordement plus élevé (C^1 , C^2).

Il s'agit de trouver un **compromis** entre la régularité souhaitée et la complexité des calculs nécessaires pour l'obtenir.

De façon intuitive, il semble raisonnable de répartir les degrés de liberté également entre les deux extrémités d'un morceau. Ce choix donne un nombre pair de conditions, et par conséquent un polynôme de degré impair.

Dans la pratique, les **splines cubiques** se sont avérées un excellent compromis.

Raccordement de splines cubiques

On appelle spline cubique d'Hermite une spline de degré trois, permettant de construire un polynôme de degré 3 interpolant une fonction en deux points avec leur tangente.

$$\vec{P}(u) = H_1\vec{P}(0) + H_2\vec{P}(1) + H_3\vec{P}'(0) + H_4\vec{P}'(1)$$

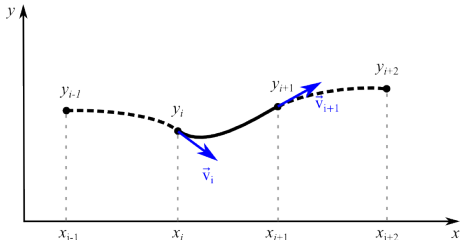
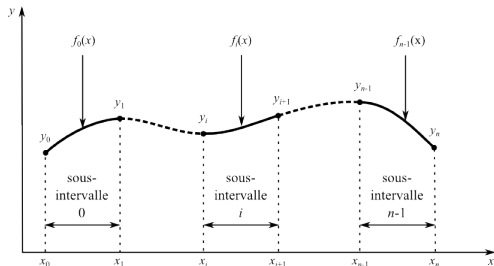
La courbe est donc déterminée à ses extrémités par la position des points ($P(0)$ et $P(1)$) et des tangentes associées ($P'(0)$ et $P'(1)$).

Les conditions de **raccord** pour une spline cubique sont appliquées au noeud i entre deux morceaux.

Pour distinguer les morceaux, on a recours à la notation indicée p_i , par exemple pour l'intervalle $[i, i + 1]$ on écrira :

$$\vec{P}_i(u) = H_1p_i + H_2p_{i+1} + H_3p'_i + H_4p'_{i+1}$$

Représentation



Extension à un intervalle quelconque

Le paramètre u est normalisé pour deux points i et $i + 1$ par

$$u = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

On pose :

$$P_i(u) = p_i \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)$$

Alors :

$$P'_i(u) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} p'_i \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)$$

Spline cubique d'Hermite sur un intervalle quelconque :

$$\vec{P}_i(u) = H_1 p_i + H_2 p_{i+1} + H_3 (x_{i+1} - x_i) p'_i + H_4 (x_{i+1} - x_i) p'_{i+1}$$

Spline cubique

Les dérivées ne sont pas disponibles dans les données du problème, elles sont donc estimées à partir de celles-ci.

On note h_i les écarts : $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Pour un point (x_i, y_i) , on définit la dérivée à gauche et à droite (forme de Catmull-Rom) :

$$\delta_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad \delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

Spline cubique

Si les dérivées à droite ou à gauche sont de signes opposés ou si l'une des deux est nulle, alors la dérivée en i est nulle (on force un extremum local ou un plateau).

Sinon, la dérivée en i est prise comme la moyenne harmonique² des dérivées à gauche et à droite :

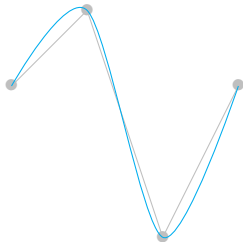
$$p'_i = \frac{1}{\frac{w_1}{\delta_{i-1}} + \frac{w_2}{\delta_i}}$$

avec w_1 et w_2 , des coefficients (dit de tension) permettant de prendre en compte la répartition inégale des x_i .

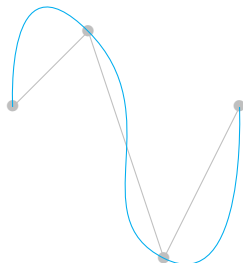
Les points aux limites nécessitent un traitement particulier.

2. inverse de la moyenne arithmétique des inverses des termes.

Représentation de la tension



tension à 0,5



tension à 2

Condition C^0

Pour appliquer la condition de raccord au noeud i , on pose :

- $u = 1$ pour le morceau $[i - 1, i]$
- $u = 0$ pour le morceau $[i, i + 1]$

La condition de continuité C^0 de la courbe au noeud i s'exprime par $\vec{P}_{i-1}(u) = \vec{P}_i(u)$ avec :

$$\begin{aligned}\vec{P}_{i-1}(u) &= H_1(1)p_{i-1} + H_2(1)p_i + H_3(1)p'_{i-1} + H_4(1)p'_i \\ \vec{P}_i(u) &= H_1(0)p_i + H_2(0)p_{i+1} + H_3(0)p'_i + H_4(0)p'_{i+1}\end{aligned}$$

► en évaluant les H_i , on obtient $\vec{P}_{i-1}(1) = \vec{P}_i(0)$ (points confondus).

Condition C^1

On exprime le vecteur tangent en dérivant le polynôme d'Hermite par rapport à u :

$$H'_1 = 6u^2 - 6u$$

$$H'_2 = -6u^2 + 6u$$

$$H'_3 = 3u^2 - 4u + 1$$

$$H'_4 = 3u^2 - 2u$$

En évaluant les expressions H_i pour les valeurs de $u = 1$ pour \vec{P}'_{i-1} et $u = 0$ pour \vec{P}'_i , on obtient : $\vec{P}'_{i-1}(1) = p'_i$ et $\vec{P}'_i(0) = p'_i$.

► les deux **vecteurs tangents coïncident**, la condition de continuité C^1 est vérifiée.

Condition C^2

En dérivant de nouveau les polynômes d'Hermite, on trouve :

$$H_1'' = 12u - 6$$

$$H_2'' = -12u + 6$$

$$H_3'' = 6u - 4$$

$$H_4'' = 6u - 2$$

En évaluant les expressions H_i pour les valeurs de $u = 0$ et $u = 1$, on obtient : $p'_{i-1} + 4p'_i + p'_{i+1} = 3(p_{i+1} - p_{i-1})$.

Cette relation s'applique au noeud i , et donne la condition que doivent vérifier les vecteurs tangents au noeud i et à ses voisins.

Conditions aux extrémités

Appliquée à l'ensemble des n noeuds, ces $(n - 2)$ équations expriment la relation entre les valeurs des vecteurs tangents et celles des vecteurs positions aux noeuds de la spline.

Des **conditions supplémentaires** aux extrémités de la courbe par morceaux doivent compléter ce système :

- vecteurs tangents imposés (« spline forcée »),
- condition sur la courbure (nulle, parabolique, ...),
- courbe fermée.

Plan

- 1 Représentation des courbes
- 2 Représentation polynomiale
- 3 Fonctions Splinaires
- 4 Fonctions de Bézier**

Motivation

La création interactive d'une courbe par des points de collocation est difficile car l'action d'un point est très directe sur l'allure de la courbe.

Si on assouplit les conditions de collocation par des **conditions d'osculation** ou de moyenne pondérée, l'action d'un point est alors plus indirecte et on obtient un contrôle plus souple.

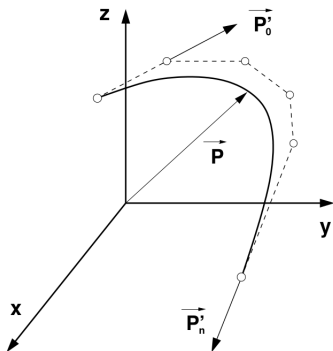
▶ modélisation qui s'apparente davantage au tracé à main levée.

Caractéristiques générales

Les fonctions de Bézier sont des **polynômes d'interpolation** construits par osculation d'un polygone de contrôle à n cotés.

En comparaison avec les polynômes conventionnels ou les splines, l'information pour la représentation d'une courbe de Bézier :

- est constituée seulement de points,
- ne comprend pas les vecteurs tangents de façon explicite.



Procédé algorithmique

Les courbes de Bézier ont été définies avec un **procédé algorithmique**, la formalisation est venue ensuite.

À partir de $n + 1$ points de contrôle, on peut construire les n barycentres des paires $\{M_i, M_{i+1}\}$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$ affectés des coefficients $1 - u$ et u , $u \in [0, 1]$, c'est à dire les n points

$$(1 - u)M_i + uM_{i+1}, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

On calcule à nouveau deux-à-deux les $n - 1$ barycentres des n points obtenus (toujours avec les mêmes coefficients) et ainsi de suite jusqu'à n'obtenir qu'un **seul point** pour un u donné.

Exemple

Exemple

Dans le cas d'une courbe de Bézier cubique, on a les points suivants :

$$M_{0,0} = M_0 \quad M_{0,1} = (1 - u)M_{0,0} + uM_{1,0} \quad M_{0,2} = (1 - u)M_{0,1} + uM_{1,1}$$

$$M_{1,0} = M_1 \quad M_{1,1} = (1 - u)M_{1,0} + uM_{2,0} \quad M_{1,2} = (1 - u)M_{1,1} + uM_{2,1}$$

$$M_{2,0} = M_2 \quad M_{2,1} = (1 - u)M_{2,0} + uM_{3,0}$$

$$M_{3,0} = M_3$$

$$\text{et } M_{0,3} = (1 - u)M_{0,2} + uM_{1,2}.$$

Exemple

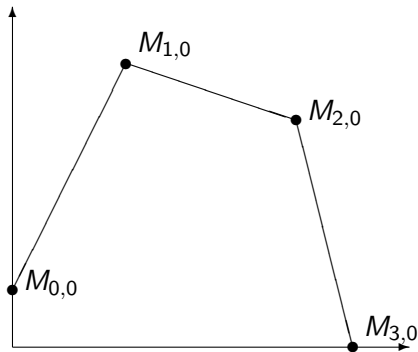


Figure – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

Exemple

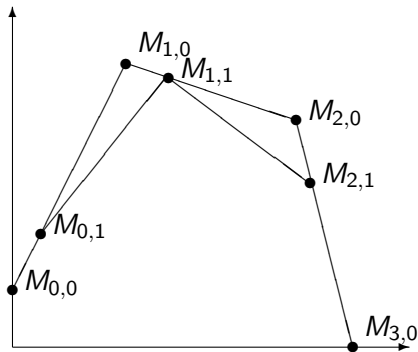


Figure – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

Exemple

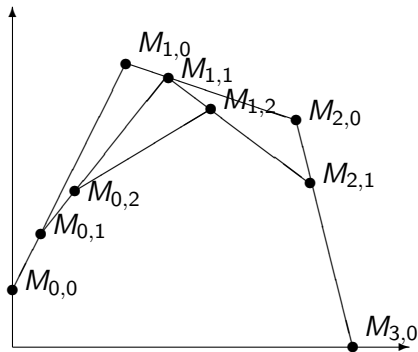


Figure – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

Exemple

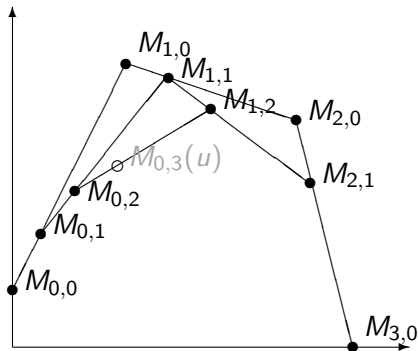


Figure – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

Exemple

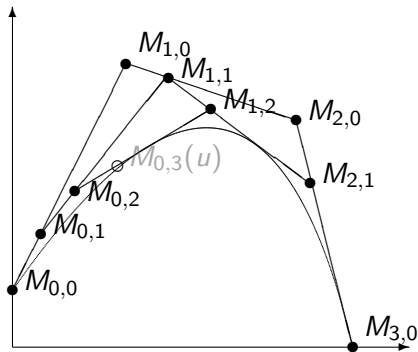


Figure – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

Les polynômes de Bernstein

Definition

Soit n un entier strictement positif. On appelle p -ème *polynôme de Bernstein* d'ordre n le polynôme de $\mathbf{R}[T]$ défini par :

$$B_{n,p}(T) := \binom{n}{p} T^p (1 - T)^{n-p}$$

où $\binom{n}{p}$ est le p -ème coefficient binomial, i.e.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les polynômes de Bernstein

Theorem

Les polynômes de Bernstein $B_{n,p}(T)$, $0 \leq p \leq n$, forment une *base* de l'espace $\mathbf{R}_n[T]$ des polynômes de degré au plus n sur \mathbf{R} .

On peut donc représenter *tout polynôme* de degré inférieur à n à l'aide d'une *combinaison linéaire de polynômes de Bernstein*.

Propriété fondamentale : les polynômes de Bernstein de degré n permettent de représenter toutes les courbes obtenues à l'aide de polynômes de degrés inférieurs à n .

Les polynômes de Bernstein

Proposition

Les polynômes de Bernstein satisfont l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^n B_{n,p}(u) = 1 \quad \forall u \in [0, 1] \quad (3)$$

Preuve.

La formule du binôme de Newton nous donne pour tout $0 \leq p \leq n$:

$$1 = (T + (1 - T))^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} T^p (1 - T)^{n-p} = \sum_{p=0}^n B_{n,p}(T)$$



Les polynômes de Bernstein

On peut alors construire une courbe \mathcal{C} dont les points $M(u)$ sont les **barycentres** des points de contrôle M_p , $0 \leq p \leq n$, affectés respectivement des **coefficients** $B_{n,p}(u)$, $0 \leq p \leq n$, $u \in [0, 1]$.

Definition

On appelle *courbe de Bézier* de degré n , de *points de contrôle* M_p , $0 \leq p \leq n$, la courbe paramétrique définie par les points suivants :

$$M(u) = \sum_{p=0}^n B_{n,p}(u) M_p, \quad u \in [0, 1]. \quad (4)$$

Enveloppe convexe

Un segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B pondérés par des valeurs positives. Une partie P d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E est dite *convexe* si et seulement si

$$\forall (A, B) \in P \times P, [A, B] \subseteq P.$$

Theorem

L'enveloppe convexe d'une famille finie $\mathcal{M} = \{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ de points d'un \mathbf{R} -espace vectoriel est l'ensemble des barycentres de ces points, i.e.

$$\text{env}(\mathcal{M}) = \left\{ \sum_{i=0}^n u_i M_i; u_i \geq 0, \sum_{i=0}^n u_i = 1 \right\}. \quad (5)$$

Enveloppe convexe

Démonstration.

L'ensemble des barycentres des points M_i est évidemment une partie convexe qui contient ces points, elle contient donc l'enveloppe convexe de ces points.

Réciproquement, soit M un barycentre des points M_i , on peut construire M de proche en proche en calculant la succession de barycentres de deux points uniquement, donc dans l'enveloppe convexe qui contient tous les M_i . □

Enveloppe convexe

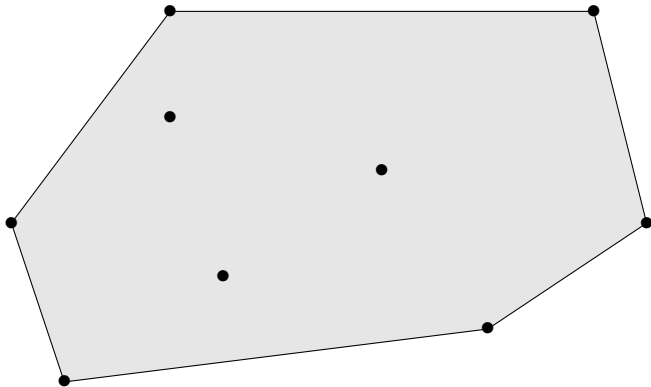


Figure – Enveloppe convexe de points (matérialisée en gris sur le dessin).

Les polynômes de Bernstein

On a les valeurs particulières des fonctions polynomiales de Bernstein suivantes ($0 < p < n$, $n \neq 0$) :

$$B_{n,0}(0) = 1$$

$$B_{n,0}(1) = 0$$

$$B_{n,p}(0) = 0$$

$$B_{n,p}(1) = 0$$

$$B_{n,n}(0) = 0$$

$$B_{n,n}(1) = 1$$

Remarque : pour tout réel a , on pose $a^0 = 1$, définition cohérente avec les opérations algébriques sur les puissances ; la convention $0^0 = 1$ est utilisée par exemple pour identifier le polynôme X^0 avec la fonction constante de valeur 1.

On en déduit que **les courbes de Bézier passent** nécessairement **par les points de contrôle extrémaux**, i.e. par M_0 et M_n .

Exemple

Soit une cubique de Bézier ($n = 3$) dont les 4 points de contrôle sont $M_0 = (0, 1)$, $M_1 = (2, 5)$, $M_2 = (5, 4)$ et $M_3 = (6, 0)$. Les polynômes de Bernstein sont les suivants :

$$B_{3,0}(T) = -T^3 + 3T^2 - 3T + 1$$

$$B_{3,1}(T) = 3T^3 - 6T^2 + 3T$$

$$B_{3,2}(T) = -3T^3 + 3T^2$$

$$B_{3,3}(T) = T^3$$

On obtient donc la courbe cubique définie par les coordonnées paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} X(u) = -3u^3 + 3u^2 + 6u \\ Y(u) = 2u^3 - 15u^2 + 12u + 1 \end{cases}$$

Exemple

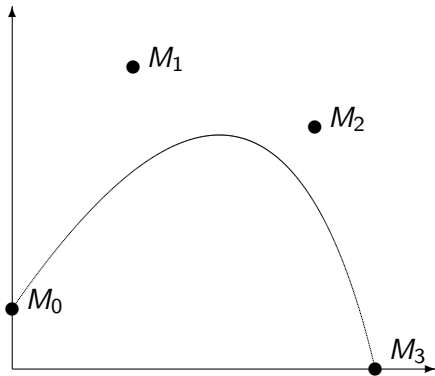


Figure – Courbe de Bézier cubique

Courbes par morceaux

Défauts des courbes de Bézier :

- le degré des polynômes qui interviennent dans la définition du point $M(u)$ de la courbe est égal à n ,
- toute modification sur un point de contrôle de la courbe affecte l'ensemble de la courbe.

Pour ces différentes raisons, on préfère construire des courbes de Bézier **par morceaux**. Avantages :

- les calculs qui sont simplifiés,
- la modification d'un point de contrôle affectera *localement* la forme de la courbe générale.

En général, on utilise des courbes de Bézier cubiques ($n = 3$).

Courbes de Bézier

Courbes par morceaux

La première condition pour deux courbes de Bézier \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 est que le dernier point de contrôle de la courbe \mathcal{C}_1 soit égal au premier point de contrôle de la courbe \mathcal{C}_2 , autrement dit, la courbe doit être **continue** !

Il faut également imposer que les **tangentes** aux points de jonction soient les mêmes pour les deux courbes.

La tangente en un point $M(a)$ d'une courbe définie paramétriquement par les points $M(u)$, $u \in I$ est donnée par la droite paramétrée suivante :

$$T(u) = M(a) + uM'(a)$$

Courbes de Bézier

Courbes par morceaux

Considérons deux courbes de Bézier \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de même degré n .

Soient M_0, M_1, \dots, M_n les $n + 1$ points de contrôle de la première courbe et $M_n, M_{n+1}, \dots, M_{2n}$ les $n + 1$ points de contrôle de la seconde courbe.

La **première condition** impose que le dernier point de contrôle de la première courbe soit égal au premier point de contrôle de la seconde.

L'équation de la tangente en M_n est obtenue pour $u = 1$ avec la courbe \mathcal{C}_1 et pour $u = 0$ avec la courbe \mathcal{C}_2 . En notant $M_{(1)}(u)$ le point générique de la courbe \mathcal{C}_1 et $M_{(2)}(u)$ celui de \mathcal{C}_2 , on déduit la **condition de continuité du premier ordre C^1** :

$$M'_{(1)}(1) = M'_{(2)}(0). \quad (6)$$

Courbes de Bézier

Courbes par morceaux

Calcul des dérivées des polynômes de Bernstein pour les différentes valeurs de p en 0 et en 1 :

$$B'_{n,0}(T) = -n(1 - T)^{n-1} \quad (7a)$$

$$B'_{n,n}(T) = nT^{n-1} \quad (7b)$$

$$B'_{n,p}(T) = \binom{n}{p} T^{p-1}(1 - T)^{n-p-1}(p - nT), \quad 0 < p < n \quad (7c)$$

On en déduit les valeurs

$$B'_{n,n}(1) = n$$

$$B'_{n,0}(0) = -n$$

$$B'_{n,n-1}(1) = -n$$

$$B'_{n,1}(0) = n$$

$$B'_{n,p \in [0, n-2]}(1) = 0$$

$$B'_{n,p \in [2, n]}(0) = 0$$

Courbes de Bézier

Courbes par morceaux

On exprime alors la condition (6) sous la forme

$$n(M_n - M_{n-1}) = n(M_{n+1} - M_n),$$

c'est à dire

$$M_n = \frac{1}{2}(M_{n-1} + M_{n+1}). \quad (8)$$

Autrement dit, les trois points M_{n-1} , M_n et M_{n+1} sont alignés et le nœud M_n est situé au milieu des deux autres points.