

Rappels mathématiques

Géométrie euclidienne, vectorielle, analytique

Christian NGUYEN

Département d'informatique
Université de Toulon

Introduction

Les trois géométries

La **géométrie euclidienne** porte sur l'étude de figures du plan (droites, cercles, triangles, etc.). Les théorèmes sont démontrés en procédant par déduction à partir de certains postulats.

La **géométrie vectorielle** porte sur l'étude des vecteurs (défini par une direction, un sens et une mesure). Cet outil permet de contrôler l'alignement de points, le parallélisme ou la perpendicularité de droites, de déterminer la distance entre deux points, de calculer des angles.

En **géométrie analytique**, les figures géométriques planes sont étudiées en introduisant des systèmes de coordonnées, puis en utilisant des équations et des formules.

« Éléments d'Euclide » : points, segments, droites, demi-droites ; notions de mesure de longueur, d'aire, de volume, d'angle ; forment le support des cours de géométrie élémentaire.

Les **transformations** des figures les plus pertinentes sont les similitudes qui conservent les rapports des distances (rotations, symétries, translations, qui conservent les distances ; homothéties), L'ensemble des similitudes peut être construites par composition.

Algèbre naissante : la formule de l'aire d'un rectangle ou d'un triangle, le théorème de Thalès ainsi que celui de Pythagore offrent tous des relations *algébriques* entre des grandeurs que sont les côtés d'un triangle ou d'un rectangle.

Définition : un vecteur géométrique, noté $\vec{u}$, est un outil mathématique caractérisé par

- une direction (la droite support du vecteur),
- un sens (le sens de parcours sur la droite),
- une longueur, la norme du vecteur, notée $\|\vec{u}\|$.

Remarque : un vecteur n'a **pas de point d'application** dans le plan.

Remarque : un vecteur représente l'ensemble de ses représentants (classe d'équivalence).

Les opérations sur les vecteurs représentent un progrès par rapport à la géométrie euclidienne pour sa simplicité d'emploi et sa forme très synthétique. Elles **simplifient les démonstrations**.

Introduction

Géométrie analytique (euclidienne ou affine)

Approche de la géométrie dans laquelle les objets sont décrits par des équations ou des inéquations à l'aide d'un [système de coordonnées](#). Le choix d'un repère est indispensable, tous les objets étant décrits relativement à celui-ci.

René Descartes propose de résoudre les problèmes de géométrie par le recours au [calcul algébrique](#). Il fait un usage systématique des coordonnées et établit ainsi les premières équations de droites, paraboles ou hyperboles.

Géométrie des espaces affines (découverte de nouvelles géométries différent de celle d'Euclide par l'axiome des parallèles).

Ensembles de **points** définis par des propriétés spécifiques permettant de parler d'alignement, de parallélisme, d'intersection.

Pas de notions de longueur et d'angle : elles dépendent de structures supplémentaires, traitées dans le cadre de la **géométrie euclidienne**.

La définition formelle d'un espace affine présuppose la donnée d'un espace vectoriel, appelé l'**espace directeur**. Deux points d'un espace affine peuvent se soustraire pour donner un vecteur de l'espace directeur.

Informatique : définition algébrique des objets mathématiques.

↳ Infographie : dualité géométrique et algébrique.

- constituer un ensemble d'équations concises d'**algèbre linéaire**,
- utiliser des notations raccourcies : opérations vectorielles ou matricielles,
- manipuler des objets élémentaires : points et vecteurs.

[Wiki] L'algèbre linéaire est initiée dans son principe par le mathématicien perse Al-Khwârizmî puis utilisée par René Descartes pour relier algèbre et géométrie.

Elle permet de résoudre les équations dites linéaires utilisées notamment en mathématiques ou en mécanique.

Elle formalise une structure générale présente dans plusieurs branches des mathématiques : la notion d'espace vectoriel.

L'algèbre linéaire commence par l'étude de vecteurs (ici une classe d'équivalence de bipoints) dans les espaces cartésiens¹ de dimension 2 et 3.

1. adjectivation du nom de Descartes

Introduction

Les points

Wikipédia

Toutes les figures du plan et de l'espace sont constituées d'ensemble de points.

Le plus petit élément constitutif de l'espace géométrique.

Seule caractéristique : sa *position* (pas de dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou aire).

La notion de repère² permet de positionner tout point par ses coordonnées cartésiennes, et d'associer à tout point A , le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On ramène ainsi les problèmes de géométrie à la résolution d'équations algébriques.

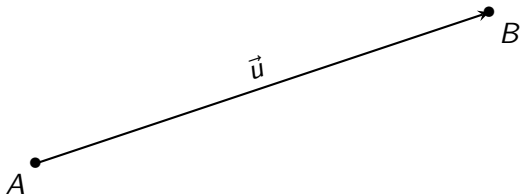
2. Descartes, Fermat

Introduction

Points et vecteurs

Dans un espace *affine* E associé à l'espace *vectoriel* V , les éléments de E sont appelés les *points* et les éléments de V sont appelés les *vecteurs*.

À chaque couple de points (ou bipoints) (A, B) , on associe un vecteur $\phi(A, B) = \vec{u}$.



Une droite d est caractérisée par l'un de ses points $A(a_1, a_2)$ et un vecteur $\vec{v}(v_1, v_2)$ définissant son orientation. Ce vecteur $\vec{v}$ est appelé **vecteur directeur** de d .

L'ensemble de tous les points $M(x, y)$ du plan qui appartiennent à la droite d est caractérisé par l'**équation vectorielle paramétrique de la droite** suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k.\vec{v}$$

Que l'on peut représenter sous forme d'un système d'**équations paramétriques** :

$$\begin{cases} x = a_1 + k.v_1 \\ y = a_2 + k.v_2 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Introduction

Droites

Soit un plan affine muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; x désigne l'abscisse d'un point, et y l'ordonnée de ce point.

Une droite peut s'exprimer sous la forme d'une fonction :

$$f : x \mapsto mx + h$$

avec m coefficient directeur, **pente de la droite**, tel que :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

et h **ordonnée à l'origine**.

Une telle droite peut également s'écrire sous la forme d'une équation appelée **équation cartésienne d'une droite affine** :

$$ax + by + c = 0$$

La notion d'espace à trois dimensions se représente assez naturellement et les physiciens en ajoutent même une quatrième, le temps.

Lorsque l'on doit représenter cet espace, on passe généralement à deux dimensions, par le dessin dans le plan.

De même, la représentation d'une force par un vecteur semble tout aussi naturelle et facilite la compréhension du concept.

Motivation : donner cette structure à certains ensembles qui ne l'ont pas naturellement.

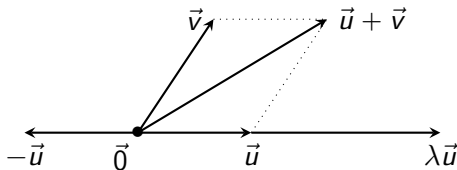
Espace vectoriel

Définition

Un **espace vectoriel** E est un ensemble d'éléments, dénommés vecteurs, possédant un ensemble de propriétés axiomatiques.

$(E, +)$ est un groupe abélien :

- $+$ est une loi commutative et associative,
- un élément neutre, noté $\vec{0}$, appelé vecteur nul,
- tout vecteur $\vec{u}$ a un opposé, noté $-\vec{u}$.



Espace vectoriel

Corps commutatif

Soit K un **corps commutatif**, les éléments du corps K sont appelés des **scalaires**.

Un **corps commutatif** est un **ensemble** avec deux lois internes (appelées addition et multiplication) :

- l'addition est associative, commutative, a un élément neutre, et tout élément doit avoir un symétrique,
- la multiplication doit aussi être associative, commutative (car c'est un corps commutatif), avec un élément neutre, et tout élément doit avoir un symétrique (sauf 0, car $1/0$ n'est pas défini).

De plus, la multiplication doit être distributive par rapport à l'addition.

Exemples de corps : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...

💬 $\mathbb{N}$ n'est pas un corps car un entier naturel n'a pas d'inverse.

Espace vectoriel

K -espace vectoriel

$(E, +, \bullet)$ est un K -espace vectoriel :

- $+$ est une loi de composition interne,
- $\bullet$ est une loi de composition externe à opérateurs dans K .

La loi $\bullet$ vérifie les propriétés suivantes :

- ① distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :
 $\forall \lambda \in K, \forall (u, v) \in E \times E, \quad \lambda.(u + v) = (\lambda.u) + (\lambda.v)$
- ② distributivité par rapport à l'addition des scalaires :
 $\forall (\lambda, \mu) \in K \times K, \forall u \in E, \quad (\lambda + \mu).u = (\lambda.u) + (\mu.u)$
- ③ associativité : $\forall (\lambda, \mu) \in K \times K, \forall u \in E, \quad \lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$
- ④ élément neutre : $\forall u \in E, \quad 1.u = u$

A noter que les éléments obtenus sont tous dans E .

Espace vectoriel

Sous-espace vectoriel

Il est fastidieux de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Un moyen plus commode de le faire est de se placer dans un espace vectoriel plus grand.

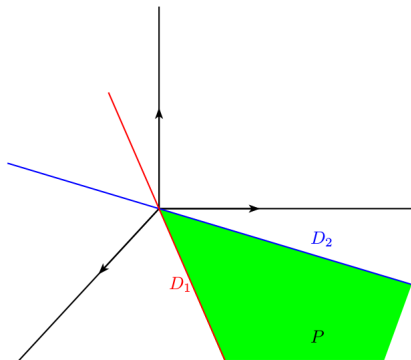
On hérite des propriétés de bon comportement des opérations, il n'y a plus qu'à montrer les **stabilités**, ce qui est beaucoup plus rapide. C'est la notion de **sous-espace vectoriel**.

Soit E un K -espace vectoriel, et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $0_E \in F$,
- F est stable par $+$: $\forall u, u' \in F, \quad u + u' \in F$
- F est stable par $\bullet$: $\forall \lambda \in K, \forall u \in F, \quad \lambda \cdot u \in F$

Espace vectoriel

Sous-espace vectoriel



- D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$,
- $D_1 \cup D_2$ n'est pas un espace vectoriel (non stable par +),
- P n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par +).

Espace vectoriel

Construction

Utilisation des **opérateurs ensemblistes** sur la structure d'espace vectoriel.

Si E et F sont des espaces vectoriels, alors $E \cap F$ est un espace vectoriel.

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E , l'ensemble de tous les éléments $u + v$, $u \in F$, $v \in G$, est un sous-espace vectoriel de E :

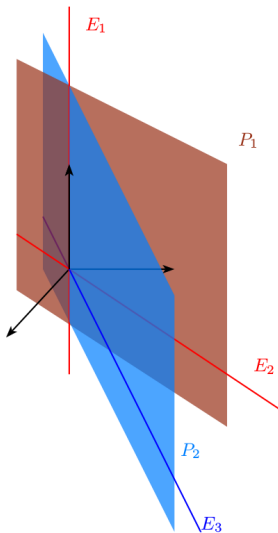
$$F + G = \{w \in E, \exists u \in F, \exists v \in G / w = u + v\}$$

Le sous-espace vectoriel $F + G$ de E est le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$, c'est donc *le plus petit* sous-espace vectoriel de E contenant F et G .

Si $F \cap G = \{0\}$, on parle de somme directe, notée $F \oplus G$.

Espace vectoriel

Construction



$$\text{On a : } \begin{cases} E_1 \oplus E_2 = P_1 \\ E_1 \oplus E_3 = P_2 \\ P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3 \\ P_1 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Construction fondamentale puisqu'elle fait intervenir les deux lois de composition de l'espace :

- l'addition de deux vecteurs,
- la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

$$u := \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$$

On peut donc construire un espace vectoriel à l'aide de sommes de sous-espaces, mais aussi en prenant l'**espace engendré** par une famille idoine.

Une famille **génératrice** est une famille de vecteurs dont les **combinaisons linéaires** permettent de construire tous les autres vecteurs de l'espace.

On aimerait pouvoir le faire avec une famille aussi petite que possible. Si tous ses éléments ne sont pas indispensables la famille est liée, sinon on dira qu'elle est libre.

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est dite **libre** si aucun vecteur de la famille ne peut s'écrire comme **combinaison linéaire** des autres.

Une famille libre et génératrice est appelée *base* du sous-espace F .

Si cette base est *finie*, son cardinal est appelé *dimension* de l'espace vectoriel F .

Remarque : certains espaces sont de dimension infinie, comme les espaces de fonctions (toute fonction n'est pas exprimable comme une somme finie d'autres fonctions).

Une base permet de construire *tous* les vecteurs de l'espace à l'aide de *combinaisons linéaires* des vecteurs de la base.

Espace vectoriel

Exemples de bases



- Le vecteur directeur d'une droite est la base de cette droite.
- Deux vecteurs non colinéaires d'un plan forment une base de ce plan.
- Trois vecteurs non colinéaires d'un plan forment une famille génératrice du plan (mais pas une base car ils ne sont pas libres).
- Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace (souvent notée i, j, k).
- Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont forcément liés.

Espace vectoriel

Exemple de base : les couleurs

Codées sur 3 octets, chaque octet correspondant à l'intensité de chacune des couleurs fondamentales en synthèse additive (codage **RVB**).

En notant E l'espace des couleurs et R , V , B les couleurs rouge, vert et bleu respectivement, la couleur **jaune** est obtenue par la *combinaison linéaire*.

$$J = 255R + 255V + 0B.$$

$\{R, V, B\}$ forment une famille *génératrice* de E puisqu'elles permettent de construire *toutes* les autres et *libre* puisqu'*aucune* d'entre elles ne peut s'obtenir comme combinaison linéaire des deux autres.

Espace vectoriel

Base canonique

Dans les espaces vectoriels « génériques » de dimension finie, on définit la *base canonique* (implicite) dont les vecteurs sont notés e_i .

Pour chaque vecteur e_i , une seule coordonnée n'est pas nulle et vaut 1. Le i représente la position du 1 dans les coordonnées du vecteur.

💬 Exemple : les vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ valent respectivement $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Lorsqu'on ne précise pas la base, on utilise la base canonique.

Espace vectoriel

Application linéaire, calcul matriciel

Une *application linéaire* est un morphisme d'espaces vectoriels i.e une application qui ne bouleverse pas ces structures.

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et φ une application de E dans F . Pour que φ soit une application linéaire, elle doit respecter :

- la structure additive : soient deux vecteurs u et v ,
$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v),$$
- la structure multiplicative : soit un vecteur u et un scalaire λ ,
$$\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u).$$

Espace vectoriel

Application linéaire, calcul matriciel

Ce que l'on peut résumer ainsi : pour toute combinaison linéaire $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$ de vecteurs de E on a :

$$\varphi(k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n) = k_1 \varphi(v_1) + \cdots + k_n \varphi(v_n)$$

En particulier si on écrit un vecteur v dans sa base,

$v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$, on a : $\varphi(v) = x_1 \varphi(b_1) + \cdots + x_n \varphi(b_n)$.

$\Rightarrow$ il suffit de connaître $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ pour calculer $\varphi(v)$ et connaître φ .



Questions :

- dans $\mathbb{R}$, $\varphi : x \rightarrow 3x$ est-elle une application linéaire ?



$$\varphi(u + v) = 3(u + v) = 3u + 3v = \varphi(u) + \varphi(v)$$

$$\varphi(\lambda u) = 3(\lambda u) = \lambda(3u) = \lambda \varphi(u)$$

- et $\varphi : x \rightarrow 3x + 2$?



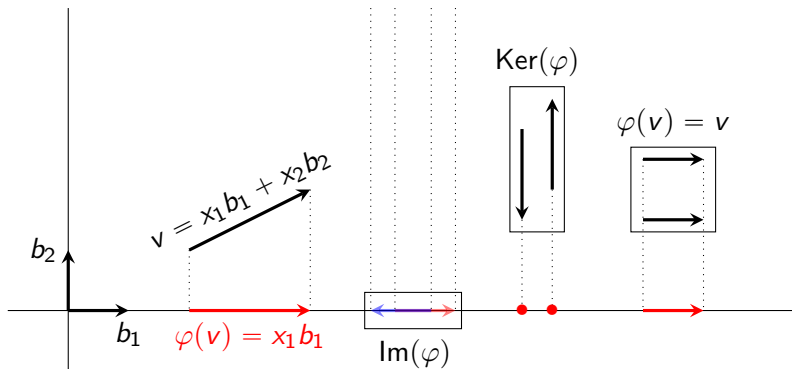
$$\varphi(u + v) = 3(u + v) + 2 = 3u + 3v + 2 \neq \varphi(u) + \varphi(v)$$

Propriétés des applications linéaires

- $\varphi(0_E) = 0_F$ (car $\varphi(0_E) = \varphi(v - v) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0_F$),
- $\text{Im}(\varphi)$, l'ensemble de toutes les images des éléments de E par φ , est un sous espace vectoriel de F ,
- $\text{Ker}(\varphi)$, l'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image 0_F , est un sous espace vectoriel de E ,
- l'ensemble des vecteurs v de E tels que $\varphi(v) = kv$ (avec k donné) est un sous espace vectoriel de E (en particulier c'est le cas des invariants de E qui sont tels que $\varphi(v) = v$).

Application linéaire, calcul matriciel

Exemple de la projection φ du plan E de base (b_1, b_2) sur la droite F de base (b_1) parallèlement à (b_2)



Lien entre calcul matriciel et application linéaire φ :

- soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies respectives $p > 0$ et $n > 0$ et de bases respectives e et f ,
- soit φ une application linéaire de E dans F ,

on appelle **matrice représentative** de φ dans les bases e et f la matrice (α_{ij}) déterminée par

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} f_i.$$

Exemple, transformation d'une image en niveaux de gris :

$$\begin{pmatrix} g_r \\ g_v \\ g_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,299 & 0,587 & 0,114 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \quad (1)$$

En informatique :

- implantation des applications linéaires : sous forme matricielle,
- transposition de la structure matricielle : la structure de tableau.

Deux transformations élémentaires : les *translations* (loi additive interne) et les *homothéties* (loi multiplicative externe).

Soit E un K -espace vectoriel et v un vecteur de E . On appelle *translation de vecteur v* , l'application $t_v : E \rightarrow E$ définie par

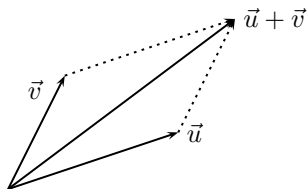
$$t_v(u) = u + v.$$

Soit E un K -espace vectoriel et λ un scalaire de K . On appelle *homothétie de rapport λ* , l'application $h_\lambda : E \rightarrow E$ définie par

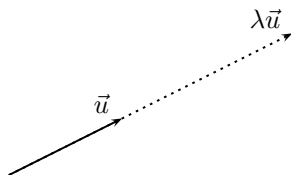
$$h_\lambda(u) = \lambda u.$$

Espace vectoriel

Translations et homothéties



translation de vecteur $\vec{v}$



homothétie de rapport λ



Dans le plan euclidien, l'application h_λ est-elle une application linéaire ?

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \quad (2)$$



Dans le plan euclidien, l'application t_v est-elle une application linéaire ?

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \end{pmatrix} = (\text{non}) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \quad (3)$$

La structure d'espace vectoriel est le support de base pour faire de la géométrie.

Deux notions supplémentaires pour manipuler les objets du plan : *distance* et *angle*, toutes deux obtenues grâce au *produit scalaire*.

On appelle *produit scalaire* l'application $\phi : K^n \times K^n \rightarrow K$ définie dans une base orthonormée par

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad (4)$$

avec $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

On note souvent $(\vec{u} | \vec{v})$ le nombre réel $\phi(\vec{u}, \vec{v})$.

Un produit scalaire permet de définir une *norme* puis une *distance* dites *induites*. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs du plan,

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{(\vec{u} | \vec{u})} \quad \text{et} \quad d(\vec{u}, \vec{v}) := \|\vec{v} - \vec{u}\|. \quad (5)$$

la norme et la distance ainsi définies sont la norme et la distance *euclidiennes*.

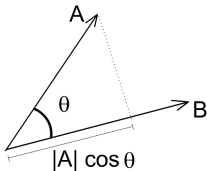
Un vecteur est dit *normé* ou *unitaire* si $\|\vec{u}\| = 1$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, autrement dit si $(\vec{u} | \vec{v}) = 0$.

Ils sont *orthonormés* s'ils sont orthogonaux et si chacun des vecteurs est normé.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan euclidien, alors :

$$(\vec{u} | \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$



Projeté : la trigonométrie du triangle rectangle permet de calculer le produit scalaire grâce à une projection orthogonale. Soit C le projeté de A sur B , on a :

$$(A | B) = \|A\| \|B\| \cos \theta = \|B\| \|C\|$$

Espace vectoriel

Produit scalaire

✎ Soient les points $A(8, -3)$ et $B(5, 7)$. Que vaut $\|\vec{AB}\|$?

👍 $\vec{AB} = (-3, 10)$ et $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(AB | AB)} = \sqrt{9 + 100} \approx 10,44$.

✎ Les vecteurs $\vec{u} = (1, -3)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils perpendiculaires ?

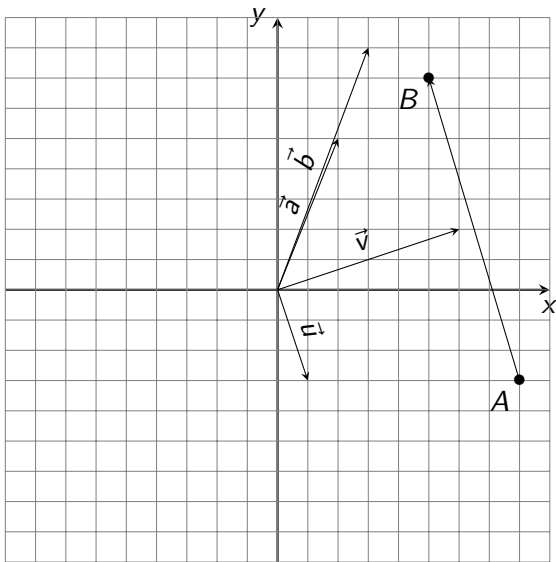
👍 oui car $(u | v) = 6 - 6 = 0$

✎ Dans le plan euclidien, déterminer l'angle entre les deux vecteurs $\vec{a} = (2, 5)$ et $\vec{b} = (3, 8)$.

👍 $\cos(\langle a, b \rangle) = \frac{(a | b)}{\|a\| \|b\|} = \frac{46}{\sqrt{29 \times 73}} \approx 1$ donc quasi colinéaires

Espace vectoriel

Produit scalaire



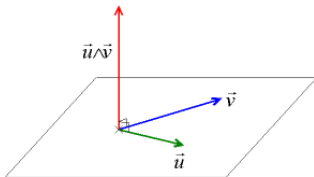
Espace vectoriel

Produit vectoriel

Opération effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension trois.

Le **produit vectoriel** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

- le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs donnés,
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct,
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.



Si $\vec{u} = (a, b)$, alors les vecteurs $\vec{v} = (x, y)$ orthogonaux à $\vec{u}$ satisfont

$$ax + by = 0. \quad (6)$$

Il s'agit là de l'équation d'une droite vectorielle D .

Si $\vec{u} = (x, y)$ est un vecteur non-nul et appartient à la droite D , i.e. s'il satisfait (6), alors tout vecteur $\lambda\vec{u}$ qui lui est colinéaire ($\lambda \neq 0$) satisfait l'équation (6) également.

N'importe lequel de ces vecteurs est appelé vecteur directeur de la droite D .



- ① Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs directeurs de deux droites parallèles ?

👍 ils sont colinéaires

- ② On considère la droite d d'équation :
 $(x, y) = (-2, 3) + k(5, -7)$. Déterminer l'équation paramétrique de la droite parallèle à d et passant par $P(8, -9)$.

👍 $(x, y) = (8, -9) + k(5, -7)$

- ③ Déterminer l'équation paramétrique de la droite perpendiculaire à d et passant par $P(8, -9)$.

👍 $(x, y) = (8, -9) + k(7, 5)$

Une matrice A (2×2) est dite *orthogonale* si les vecteurs formés par les deux colonnes de la matrice sont orthonormés.

Ceci équivaut à ce que l'application linéaire représentée par cette matrice conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{P}, \quad (Au \mid Av) = (u \mid v). \quad (7)$$

Les matrices orthogonales de déterminant 1 sont appelées des matrices orthogonales directes ou **matrices de rotation**.

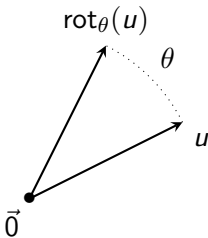
Espace vectoriel

Matrice de rotation

On appelle donc *rotation d'angle θ* l'application $\text{rot}_\theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ définie par $u \mapsto \text{rot}_\theta(u)$.

Cela se traduit sous forme matricielle, en notant $u = (x, y)$, par

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (8)$$



Espace affine

Introduction

[Wiki] En géométrie, la notion d'espace affine généralise la notion d'espace issue de la géométrie euclidienne en omettant les notions d'angle et de distance.

Alignement, parallélisme, barycentre s'expriment sous une forme qui utilise des rapports de [mesures algébriques](#), qui est une notion affine.

La définition d'espace affine s'appuie sur celle d'espace vectoriel sur le corps des nombres réels pour la géométrie affine. Les éléments de l'espace affine sont appelés [points](#), ceux de l'espace vectoriel associé [vecteurs](#), et ceux du corps associé [scalaires](#).

Espace affine

Définition

Soit E un ensemble et V un K -espace vectoriel. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow V$ une application satisfaisant :

- ① $\forall (A, B) \in E^2, \forall v \in V, A + v = B \Leftrightarrow AB = v$ (bijection),
- ② $\forall (A, B, C) \in E \times E \times E, \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$
(relation de Chasles).

Le couple (E, φ) est appelé **espace affine** défini sur V . Les éléments d'un espace affine sont appelés des **points**.

Les points d'un espace affine sont aussi des vecteurs, tout dépend du point de vue auquel on se place.

- un point a une position, ni direction, ni longueur,
- un vecteur a une direction et une longueur, pas de position.

Si une origine est spécifiée, un point peut-être représenté par un vecteur, soient A , B deux points du plan affine alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $B - A$.

Espace affine

Droite affine

La première (resp. seconde) coordonnée d'un point $M = (x, y)$ dans le plan affine est appelée *abscisse* (resp. *ordonnée*).

Soit Δ une droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$. On appelle *droite affine* de direction Δ contenant $A = (x_A, y_A)$ l'ensemble des points $M = (x, y)$ de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AM} \in \Delta$.

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0.$$

En notant que si A décrit le plan $\mathcal{P}$, alors $-(ax_A + by_A)$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier, l'équation générale d'une droite affine est obtenue pour trois scalaires a, b et c par

$$ax + by + c = 0.$$

Espace affine

Droite affine

 On considère la droite $-3x + 2y - 6 = 0$. Dans chacun des cas suivant, déterminer les coordonnées d'un point P de cette droite :

- ① Ayant une abscisse égale à 3.

 $P(3, 15/2)$

- ② Ayant une ordonnée égale à -4.

 $P(-14/3, -4)$

- ③ Ayant ses deux coordonnées égales.

 $P(-6, -6)$

- ④ Situé sur l'axe des abscisses.

 $P(-2, 0)$

- ⑤ Situé sur l'axe des ordonnées.

 $P(0, 3)$

- ⑥ Situé sur la droite $5x - 7y + 4 = 0$.

 $P(-34/11, -18/11)$

Espace affine

Translation, rotation, symétrie

La **translation** d'un point de l'espace affine est définie exactement de la même manière que dans un espace vectoriel.

La **rotation** d'un angle θ **autour d'un point** I du plan affine $\mathcal{P}$ est l'application $\text{rot}_{(I,\theta)} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui associe à un point M l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{IM'} = \text{rot}_{\theta}(\overrightarrow{IM}). \quad (9)$$

où rot_{θ} désigne la rotation vectorielle d'angle θ .

Remarque : quand $\theta = \pi$, la rotation $\text{rot}_{(I,\pi)}$ s'appelle **symétrie** de centre I .

Transformations dans le plan

Généralités

Deux types de transformation (complémentaires) :

- les **transformations géométriques**, qui permettent de déplacer les objets par rapport à un système de coordonnées fixe,
- les **transformations de coordonnées**, pour lesquelles l'objet reste fixe par rapport à un système de coordonnées en mouvement par rapport à cet objet.

Remarque : les transformations de coordonnées sont essentielles dans le « prélèvement » c'est à dire la définition des objets dans leur propre système de coordonnées local, puis leur plongement dans un système de coordonnées principal.

Transformations dans le plan

Les transformations géométriques

Soit un système de coordonnées cartésien dans le plan et un objet considéré comme un ensemble de points.

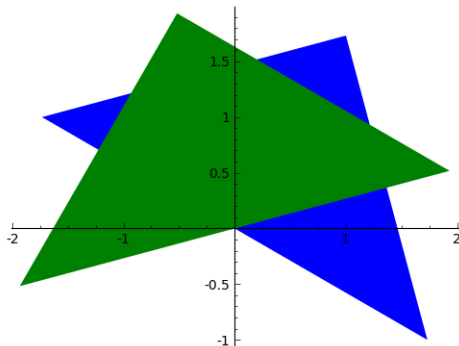
Toutes transformations appliquées à cet objet peuvent être ramenées à des transformations identiques appliquées à l'ensemble des points définissant cet objet.

$$P'(x', y') = P(x, y) + T_v \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

$$P'(x', y') = R_\theta(P(x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = y \cos \theta + x \sin \theta \end{cases}$$

Transformations dans le plan

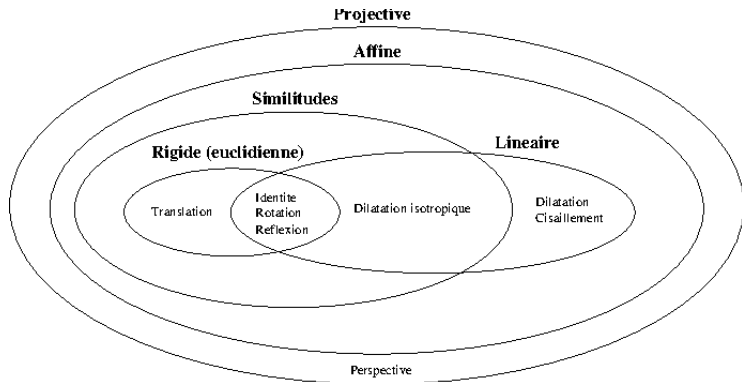
Les transformations géométriques



Rotation d'un objet (ici un polygone)

Transformations dans le plan

Classes de transformations



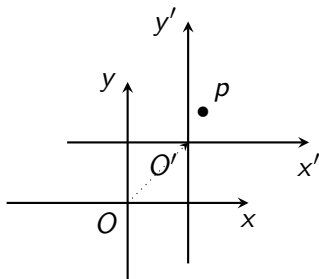
- les *transformations rigides* préservent distances et angles,
- les *similitudes* préservent les angles,
- les *transformations affines* préservent le parallélisme,
- les *transformations projectives* préservent le sens.

Transformations dans le plan

Les transformations de coordonnées

Supposons un plan muni des deux systèmes de coordonnées (O, x, y) et (O', x', y') . Chaque point du plan a donc deux jeux de coordonnées.

Si on suppose que le second système est le résultat d'une **transformation** appliquée au premier, on dit qu'une **transformation de coordonnées** (une transformation linéaire qui peut être définie par une matrice) a été effectuée.



translation t du repère

$$p' \begin{cases} x' = x - t_x \\ y = y - t_y \end{cases}$$

 $p = (2.5, 3)$ et $t = (2, 2)$
alors $p' = (0.5, 1)$.

Motivation initiale : trouver un cadre théorique adapté à l'étude des perspectives.

- un étudiant en science a appris que deux droites parallèles ne se coupent pas,
- un architecte sait qu'elles se coupent à l'infini (ce que le dessin en perspective montre bien).

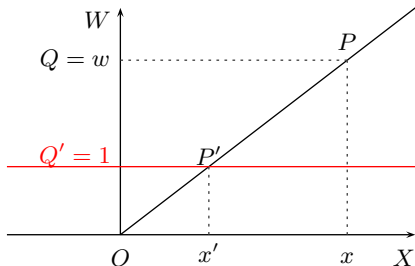
Motivation en infographie : simplification des transformations planes, ainsi la translation devient une transformation linéaire dans le plan projectif.

Espaces projectifs

Les coordonnées homogènes (Möbius 1827)

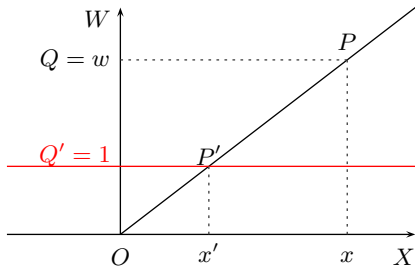
Soit un point quelconque $P(x, w)$ (avec $w \neq 0$), sa projection centrale $P'(x', 1)$ est l'intersection de la droite OP et de la droite d'équation $w = 1$.
On constate que les deux triangles OPQ et $OP'Q'$ sont semblables si bien que :

$$x' = \frac{x'}{1} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{x}{w}$$



Espaces projectifs

Les coordonnées homogènes



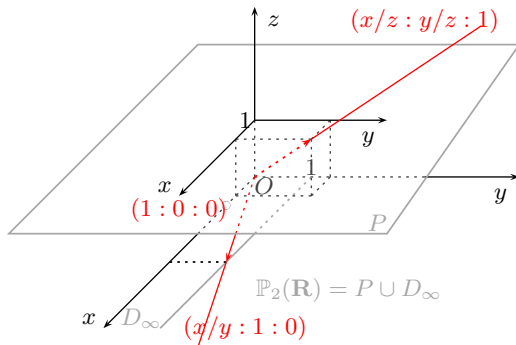
$$x = w x'$$

- tous les points vérifiant cette relation sont sur la droite OP ,
- ils ont tous la même projection P' sur la droite $Q' = 1$,
- tout couple de coordonnées (wx', w) peut être utilisé pour définir P' , et en particulier le couple $(x', 1)$.

Espaces projectifs

Les coordonnées homogènes

Dans le sous-espace de codimension 1 du plan, un même point a plusieurs représentations distinctes, correspondant à une relation de proportionnalité : $P_i(tx_i, ty_i, th_i)$ avec $t \neq 0$.

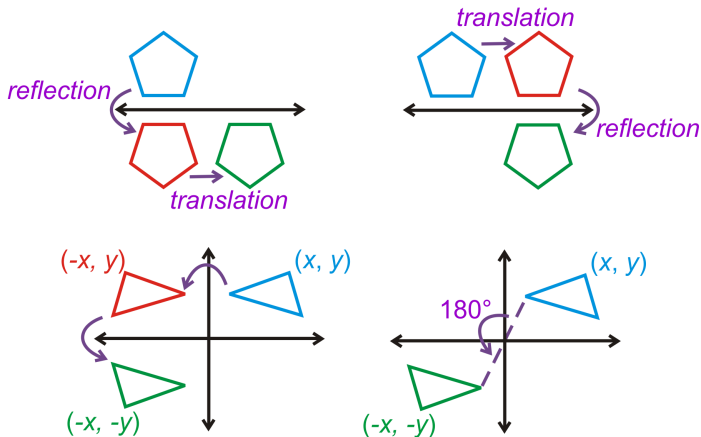


Puisque les points sont représentés par des vecteurs-colonnes composés de trois éléments, les matrices correspondantes sont 3×3 :

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_{x|y} \begin{pmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Espaces projectifs

Compositions de transformation



Espaces projectifs

Compositions de transformation

Exemple, rotation autour d'un point quelconque :

$$v' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot v$$



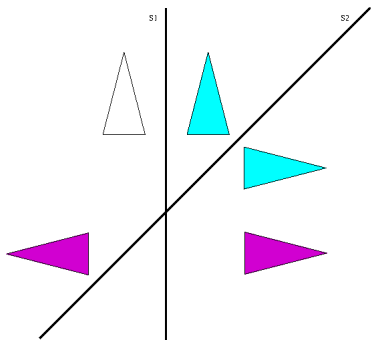
Avantage principal : gain en efficacité. En effet, l'application sur un point de cette transformation affine nécessite 9 multiplications et 6 additions. Cependant, sa structure fixe permet de simplifier le calcul en 4 multiplications et 4 additions.

Espaces projectifs

Géométrie des transformations

[Wikipédia] Étude géométrique centrée sur les groupes de transformations géométriques et à leurs propriétés, indépendamment des figures, considérées invariantes.

Elle contient des processus **non commutatifs**. Par exemple, l'ordre d'application de deux symétries axiales peut conduire à deux résultats différents.

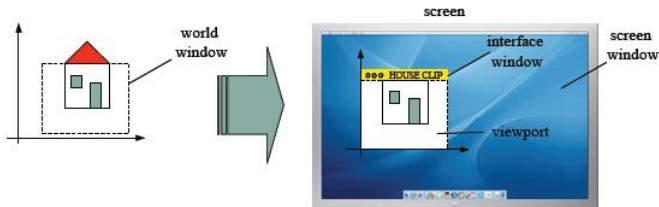


Espaces projectifs

Transformation de visualisation

Souvent, les dimensions des objets sont incompatibles avec le système de coordonnées du dispositif d'affichage (immeuble, molécule, ...).

On distingue la fenêtre (*window*) qui est parallèle aux axes du système de coordonnées et liée aux objets, de la zone de visualisation (*viewport*) liée à l'image résultante.



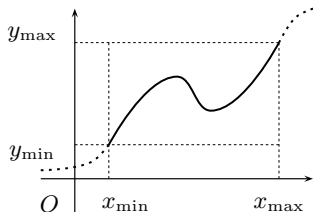
On distingue donc trois systèmes de coordonnées :

- le système de coordonnées absolues ou repère du monde (*World Coordinate* ou *WC*), qui décrit l'objet par rapport à un système de coordonnées cartésien,
- le système de coordonnées normalisées (*Normalized Coordinate* ou *NC*) $[0, 1] \times [0, 1]$,
- le système de coordonnées du dispositif physique (*Display Coordinate* ou *DC*).

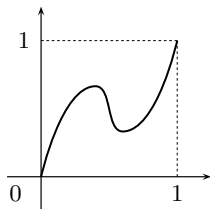
Transformations de visualisation

Exemple

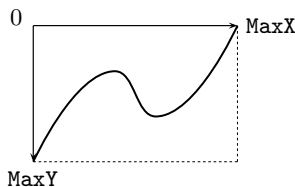
La représentation d'une courbe sur un écran nécessite quelques transformations à partir de sa représentation dans le plan réel $\mathcal{P}$.



fenêtre d'observation/espace réel [WC]



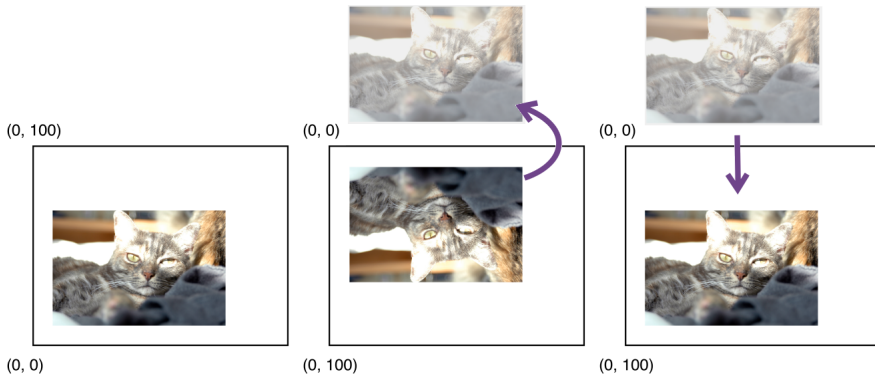
espace normalisé [NC]



fenêtre de visualisation/écran [DC]

Transformations de visualisation

Passage d'un repère orth. direct à indirect



Attention au changement de repère